

Modos Deslizantes
con criterio
 H_∞
y aplicación al
Control Descentralizado

Fernando Castaños Luna
Autor

Leonid M. Fridman
Director de Tesis

Universidad Nacional Autónoma de México
Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería

Índice general

Índice general	III
Glosario	v
1 Introducción	1
1.1. Motivación	1
Modos deslizantes	1
Control Descentralizado	3
1.2. Contribución	3
Resolución de los problemas generales	4
Control descentralizado	5
1.3. Estructura del Trabajo	5
2 Modos Deslizantes	7
2.1. Sistemas de Estructura Variable	7
2.2. Modos Deslizantes Convencionales	9
Técnicas de diseño	11
Invarianza	14
2.3. Modos Deslizantes Integrales	15
Técnicas de diseño	15
Invarianza	17
2.4. Ejemplo	20
Modelo matemático	21
Control MD	24
Control MDI	26
3 Modos Deslizantes con Criterio \mathcal{H}_∞	29
3.1. Introducción al control \mathcal{H}_∞	29
El problema de control \mathcal{H}_∞	31

ÍNDICE GENERAL

Solución al problema \mathcal{H}_∞	31
3.2. Combinación de las dos Técnicas	34
Retro de estado con condición de acoplamiento . . .	34
Retro de estado sin condición de acoplamiento . . .	37
Retro de salida sin condición de acoplamiento	40
4 Aplicación al Control Descentralizado	49
4.1. Motivación	49
4.2. Planteamiento del Problema	50
4.3. Resultados Previos	51
Estabilización	51
Control óptimo	54
Control robusto	55
4.4. Contribución	56
Retro de estado con condición de acoplamiento . . .	57
Retro de estado sin condición de acoplamiento . . .	62
Retro de Salida sin Condición de Acoplamiento . . .	65
5 Conclusiones	71
5.1. Resultados Generales	71
5.2. Modos Deslizantes y \mathcal{H}_∞	71
5.3. Aplicación al Control Descentralizado	72
Bibliografía	73

Glosario

I La matriz identidad (de dimensión apropiada).
 $\mathcal{O}_p(x)$ Una función que contiene términos de x a la potencia p y superiores.

\mathcal{B} (Prefijo). La bola de radio unitario...
 \mathcal{R} (Prefijo). Las funciones reales-rationales...

\mathcal{H}_2 El espacio de Hardy, compuesto por funciones de cuadrado integrable sobre el eje imaginario y con continuación analítica en el plano derecho.
 \mathcal{H}_∞ El espacio de Hardy, compuesto por funciones acotadas y con continuación analítica en el plano derecho.
 \mathcal{L}_2 El espacio de Lebesgue, compuesto por funciones de cuadrado integrable sobre $(-\infty, \infty)$.
 \mathcal{C} El espacio formado por funciones continuas.
 \mathbb{R} El conjunto formado por los números reales.
 \mathbb{C} El conjunto formado por los números complejos.

$\ B\ $	La norma euclídea de B .
B^T	La matriz transpuesta de B .
B^+	La pseudo-inversa de B , $B^+ \triangleq (B^T B)^{-1} B^T$.
B^\perp	Una matriz cuyas columnas expanden el espacio ortogonal a B , $B^T \times B^\perp = 0$.
$\nabla s(x)$	El gradiente de s , $\nabla s(x) = \left[\frac{\partial s}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial s}{\partial x_n} \right]^T$

$\ker(B)$	El kernel o espacio nulo de B .
$\text{span}(B)$	El espacio expandido por las columnas de B .
$\text{rank}(B)$	El número de columnas independientes en B .
$\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$	La matriz diagonal a bloques formada por los argumentos de la función;
	$\text{diag}(d_1, \dots, d_n) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{bmatrix}.$
$\text{col}(x_1, \dots, x_n)$	El vector columna formado por los argumentos de la función;
	$\text{col}(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
$\text{sign}(s)$	La función <i>signum</i> , $\text{sign}(s) = \begin{cases} 1 & s > 0 \\ -1 & s < 0 \end{cases}.$

$\left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	Un sistema representado por una matriz de transferencia,
	$\left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \triangleq C(sI - A)^{-1}B + D.$

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Para motivar el presente trabajo, se presentan de modo muy general algunos de los problemas y algunas de las soluciones que se han obtenido en las áreas de control por modos deslizantes y control descentralizado.

Modos deslizantes

Uno de los principales problemas que surgen en el área de control, es el diseño de controladores para sistemas que operan en condiciones de incertidumbre y se encuentran sometidos a perturbaciones externas. El control por modos deslizantes resulta atractivo cuando el criterio de diseño es robustez; como se verá en el capítulo 2, un sistema controlado por modos deslizantes es insensible a perturbaciones e incertidumbres acopladas al control. A grandes rasgos, lo que hace un control por modos deslizantes es garantizar (a pesar de perturbaciones e incertidumbres), que el sistema satisfaga una restricción previamente establecida. Normalmente dicha restricción se satisface aplicando acciones de control discontinuas, usando conmutadores por ejemplo.

La técnica de control mencionada, a pesar de ser sumamente robusta, sufre de algunas desventajas. Una de ellas es el llamado *chattering* o *castañeteo*, esto es, vibraciones de alta frecuencia que pueden llegar a dañar el sistema. Otra desventaja es que el controlador sólo es capaz de eliminar las perturbaciones que entran por el

mismo canal que el control: por sí solo no es robusto en cuanto a perturbaciones desacopladas. Otro problema es que la robustez no se garantiza desde el primer momento, hay un periodo de tiempo inicial en el que el sistema no satisface la restricción preestablecida, por lo que el sistema, durante ese periodo, es sensible incluso a perturbaciones de tipo acoplado. Finalmente, tenemos el problema de retro-alimentación de salida. En la literatura sobre modos deslizantes generalmente se asume que se dispone de todo el estado.

Robustez hacia perturbaciones desacopladas. Para que el sistema sea también robusto respecto a perturbaciones desacopladas, se pueden combinar los modos deslizantes con otros métodos. Por ejemplo, en [22] se propone una estrategia *multi-modelo* con un criterio óptimo usando modos deslizantes integrales. En [30] se propone la combinación de modos deslizantes integrales con métodos de Lyapunov. En [4] se define la restricción usando desigualdades matriciales lineales *LMI*. En [3] se propone el uso de modos deslizantes convencionales en conjunto con métodos de Lyapunov.

Robustez desde el primer instante. La única forma de garantizar la robustez desde el primer momento es usando modos deslizantes integrales [28].

Retro-alimentación de salida. Cuando se utiliza un control lineal no es necesario medir el estado completo, pues es posible observarlo usando un estimador. En el caso de los modos deslizantes no es recomendable utilizar un estimador en serie con el controlador, pues como se verá en el capítulo 3, éste último pierde sus propiedades de robustez.

Para este problema se han planteado algunas soluciones. Cuando se trata con sistemas mecánicos, normalmente las variables de salida equivalen a la medición de posiciones (lineales o angulares) y lo que se necesita estimar son velocidades. Una de las propuestas es el uso de *diferenciadores exactos*, que son sistemas, también basados en modos deslizantes, cuya salida es igual a la derivada de la entrada, pero sin ruido. Para el caso general hay pocas propuestas, una de ellas se encuentra en [3], en donde se presupone que la dinámica no acoplada al control satisface la condición de Kimura-Davison [18, 7], lo cual en pocas palabras, se traduce a una presuposición de que

la dinámica no acoplada es estabilizable por medio de una retroalimentación estática de la salida.

Resumen. Antes de comentar las contribuciones de este trabajo, conviene resumir los problemas (y algunas de sus soluciones) en el cuadro 1.1.

	M.D. Integrales	M.D. Convencionales	
	Lyap. [30]	Lyap. [3]	LMI [4]
Robustez Pert. no Acopl.	Sí se considera	Sí se considera	
Robustez 1er momento	Sí se resuelve	No se resuelve	
Retro de salida	No se resuelve	Sí se considera	No se resuelve

Cuadro 1.1: Resultados Previos

Control Descentralizado

El control de una planta por medio de un controlador descentralizado resulta útil cuando la dimensión del sistema es grande o cuando el sistema se encuentra ampliamente distribuido en el espacio. Los ejemplos típicos son las estructuras flexibles con muchos grados de libertad y los sistemas eléctricos de potencia. En un control descentralizado, el sistema se descompone en un conjunto de subsistemas interconectados y se buscan leyes de control que estabilicen dichos subsistemas en presencia de la interconexiones.

El control descentralizado es un área interesante por sí sola. Uno de los resultados previos, muestra que hay sistemas lineales e invariantes en el tiempo que no pueden controlarse por medio de controladores invariantes en el tiempo, pero sí por medio de controladores periódicos. Otro resultado interesante muestra que hay ocasiones en que un funcional, restringido por una planta lineal puede minimizarse por medio de un controlador no-lineal.

1.2. Contribución

En este trabajo se plantea la combinación de modos deslizantes y \mathcal{H}_∞ . La selección del control \mathcal{H}_∞ como complemento al control por

modos deslizantes obedece principalmente a dos razones: por un lado se trata de una técnica que también se enfoca a la robustez, y por otro lado, proporciona una estimación del estado. Esta combinación permite resolver los problemas discutidos anteriormente. Como se verá más adelante, la combinación de los métodos no puede hacerse directamente.

Para verificar la efectividad de la técnica resultante, ésta se aplica al problema de control descentralizado.

Resolución de los problemas generales

Cuando es posible medir todo el estado se prefiere el uso de modos deslizantes integrales, la razón principal es la robustez desde el primer momento. Cuando se diseñan controladores por modos deslizantes integrales, los parámetros que definen la restricción a la que ha de someterse el sistema se consideran libres. En este texto se muestra que la selección arbitraria de dichos parámetros puede amplificar las perturbaciones no acopladas. Más adelante, se propone una selección sistemática de los parámetros, la cual garantiza que el efecto de las perturbaciones no acopladas, debido al uso del control discontinuo, sea mínimo. Se muestra también, que cuando se alcanza el mínimo, la perturbación desacoplada no se amplifica. Este resultado es de carácter general y puede aplicarse siempre que se consideren perturbaciones desacopladas, independientemente del método que se utilice en combinación con los modos deslizantes integrales.

La combinación de los dos métodos resulta innecesaria cuando únicamente existen perturbaciones acopladas. Otra de las contribuciones es una proposición que muestra que, bajo estas condiciones, si la planta es inestable conviene más utilizar los modos deslizantes integrales que el control \mathcal{H}_∞ . El criterio de comparación utilizado es el índice de desempeño propuesto por la teoría de control \mathcal{H}_∞ .

Se considera también el problema de retro-alimentación de salida. Se muestra que si la parte acoplada del estado es medible, entonces sí es posible utilizar un estimador para el resto del estado. Desafortunadamente la metodología propuesta no puede aplicarse en combinación con modos deslizantes integrales, sólo con modos deslizantes convencionales.

Podemos ubicar los resultados mencionados hasta ahora por medio del cuadro 1.2.

	M.D. Integrales \mathcal{H}_∞	M.D. Convencionales \mathcal{H}_∞
Robustez Pert. no Acopl.	Sí se considera	Sí se considera
Robustez 1er momento	Sí se resuelve	No se resuelve
Retro de salida	No se resuelve	Sí se considera

Cuadro 1.2: Contribución al control por modos deslizantes

Control descentralizado

Hasta ahora se ha discutido el problema de control por modos deslizantes desde un punto de vista teórico. Para verificar la utilidad de los métodos propuestos, se aplican los resultados obtenidos al control descentralizado. Con las técnicas desarrolladas, se establecen condiciones de suficiencia para la estabilización de sistemas con control descentralizado. Los controladores propuestos resultan robustos en cuanto perturbaciones estructurales, en las que los subsistemas se desconectan y vuelven a conectarse durante la operación.

1.3. Estructura del Trabajo

El siguiente capítulo presenta una breve introducción a los modos deslizantes, convencionales e integrales. Ahí se presentan también los resultados relativos a la selección sistemática de los parámetros. El capítulo 3 contiene una introducción al control \mathcal{H}_∞ y una propuesta para combinarlo con modos deslizantes. Ahí se trata el problema de retro-alimentación de salida. Las técnicas desarrolladas se aplican al control descentralizado en el capítulo 4. El capítulo 5 contiene las conclusiones.

Capítulo 2

Modos Deslizantes

En este capítulo se hace una breve introducción al control por modos deslizantes, tanto convencionales como integrales. Se describen las técnicas de diseño usuales y se analizan algunas de sus propiedades, como reducción de orden e invarianza respecto a perturbaciones de tipo acoplado. Al final se presenta un criterio para determinar la superficie deslizante en el caso de los modos deslizantes integrales, un parámetro que se ha considerado generalmente como libre.

2.1. Sistemas de Estructura Variable

En general, el término *sistemas de estructura variable* se refiere a sistemas descritos por ecuaciones diferenciales con términos discontinuos. Dichos sistemas exhiben comportamientos más variados y más complejos que los sistemas continuos. A modo de ejemplo, consideremos primero los sistemas lineales

$$\ddot{x} - 0.4\dot{x} + 0.29x = 0 \quad (2.1)$$

y

$$\ddot{x} - 0.4\dot{x} + 4.04x = 0. \quad (2.2)$$

Ambos sistemas son inestables, el primero tiene sus polos ubicados en $s_{1,2} = 0.2 \pm 0.5j$ y el segundo en $s_{1,2} = 0.2 \pm 2j$. La figura 2.1 ilustra las trayectorias de dichos sistemas cuando $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 1$. En la parte izquierda de la figura está resaltado con línea gruesa uno de los segmentos de la trayectoria cuando el estado del sistema

2. MODOS DESLIZANTES

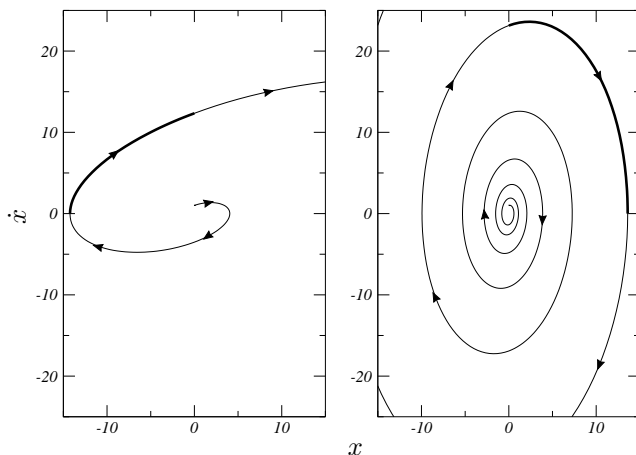


Figura 2.1: Trayectorias *inestables* de los sistemas $\ddot{x} - 0.4\dot{x} + 0.29x$ (izquierda) y $\ddot{x} - 0.4\dot{x} + 4.04x$ (derecha) con $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$.

cumple la condición $x\dot{x} < 0$. Podemos notar que durante el recorrido de ese segmento, la distancia al punto de equilibrio $x = \dot{x} = 0$ prácticamente no aumenta. Por otra parte, en el lado derecho se resalta uno de los segmentos que cumple la condición $x\dot{x} > 0$. Si bien la trayectoria tiende a infinito conforme el tiempo pasa, en el recorrido de ese segmento la distancia al origen disminuye. Consideremos ahora un sistema cuya estructura varíe entre la del sistema (2.1) y la del sistema (2.2)

$$\ddot{x} - 0.4\dot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \quad f(x, \dot{x}) = \begin{cases} 0.29x & x\dot{x} \leq 0 \\ 4.04x & x\dot{x} > 0 \end{cases} .$$

La trayectoria de dicho sistema cuando $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 1$ se muestra en la figura 2.2. Se puede observar que el sistema es asintóticamente estable, esto se debe a que la concatenación de los segmentos de cada una de las estructuras resulta en una disminución neta de la distancia al origen.

Los sistemas de estructura variable pueden ocurrir de forma natural, debido a la fricción seca por ejemplo, cuyos términos usualmente contienen discontinuidades; o de forma deliberada, con acciones de control discontinuas, normalmente aplicadas por medio de relevadores de tipo “encendido-apagado”. Estos sistemas tienen varias

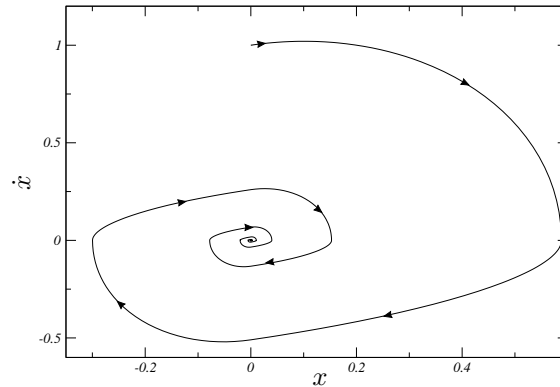


Figura 2.2: Trayectoria *estable* del sistema conmutado con $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$.

ventajas, entre ellas, la eliminación de zonas muertas, la facilidad de implementación y como se explicará más adelante, insensibilidad a determinado tipo de perturbaciones.

2.2. Modos Deslizantes (MD)

Pensemos en el sistema de estructura variable

$$\dot{x} = a - 3 \operatorname{sign}(x), \quad a = 2, \quad x(0) = c_1 \quad (2.3)$$

Cuando $x < 0$ tenemos $\dot{x} = 5$, y la solución a la ecuación es $x(t) = 5t + c_1$; para $x > 0$ tenemos $\dot{x} = -1$, y la solución está dada por $x(t) = -t + c_1$ (ver figura 2.3). Conforme t aumenta, cada solución alcanza la línea $x = 0$. La dirección de los campos impide que la solución salga de esta línea ya sea por arriba o por abajo. En este ejemplo podemos ver que a diferencia de los sistemas lineales, el punto de equilibrio se alcanza en tiempo finito. Otra propiedad importante es la de robustez, ya que el parámetro a que aparece en (2.3) podría tomar cualquier valor que satisfaga $|a| < 3$. Siempre y cuando esta relación se cumpla, el sistema alcanzará el punto de equilibrio $x = 0$ en tiempo finito.

De acuerdo con [27], puede suceder que en un sistema retroalimentado el control conmute a frecuencia alta (teóricamente infinita). Al movimiento resultante se le llama *modo deslizante*. Esta

2. MODOS DESLIZANTES

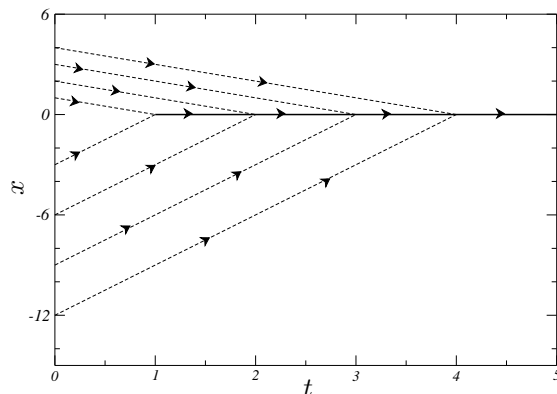


Figura 2.3: Trayectorias del sistema $\dot{x} = 2 - 3 \text{sign}(x)$.

definición, si bien es poco formal, en combinación con el ejemplo anterior nos da una idea intuitiva de lo que son los modos deslizantes. En [11] se presenta una definición formal.

El ejemplo presentado plantea un problema teórico interesante. El punto $x = 0$ es un punto de equilibrio, ya que cuando $x(t)$ llega a cero, su valor permanece constante y su derivada necesariamente es igual a cero, es decir, $\dot{x} = 0$. Sin embargo, no hay función $x(t)$, que al ser introducida en la ecuación (2.3) resulte en $\dot{x} = 0$. Es necesario pues, modificar la noción usual de *solución* de una ecuación diferencial. En la literatura de los sistemas de estructura variable se habla normalmente de soluciones en el sentido de Filippov [11]. Para fines prácticos podemos usar el método del *control equivalente*. Dicho método nos permite determinar las ecuaciones de movimiento cuando el lado derecho de la ecuación diferencial es valuado en un punto de discontinuidad.

Consideremos un sistema

$$\dot{x} = f(x, u_1(x, t), \dots, u_m(x, t), t),$$

la función f es continua en sus argumentos y las funciones $u_i(x, t)$ son discontinuas en un conjunto de puntos o superficies S_i , $i = 1, \dots, m$. Los conjuntos S_i se definen normalmente como

$$S_i = \{x | s_i(x) = 0\}.$$

En nuestro ejemplo $S_1 = \{x | s_1(x) = x = 0\} = \{0\}$ y $u_1(x, t) = 3 \operatorname{sign}(x)$. Una vez alcanzadas las superficies de discontinuidad el sistema permanece ahí, por lo que se sustituyen las $u_i(x, t)$ por funciones continuas u_{ieq} que satisfagan $\dot{s}_i = 0$. Para el ejemplo tenemos

$$\dot{s} = \dot{x} = 2 - u_{1eq} = 0,$$

por lo que

$$u_{1eq} = 2$$

y se verifica $\dot{x} = 0$.

Técnicas de diseño

Consideremos un sistema –estabilizable– descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + B(x, t)u + \phi, & x, f &\in \mathbb{R}^n \\ B(x, t) &\in \mathbb{R}^{n \times m}, & \operatorname{rank}(B(x, t)) &= m \quad \forall x, t. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Cuando la perturbación ϕ entra por el mismo canal que u , es decir $\phi = B(x, t)\delta$, la perturbación satisface la llamada *condición de acoplamiento*. Por el momento, sólo trataremos con perturbaciones de esta naturaleza.

El diseño de controladores basados en modos deslizantes consta normalmente de dos pasos. El primero es determinar una superficie de discontinuidad

$$s(x) = 0, \quad s^T(x) = [s_1(x) \quad \dots \quad s_m(x)] \quad (2.5)$$

tal que las trayectorias a lo largo de ella sean estables. El segundo paso es diseñar una acción de control discontinua

$$u_i(x) = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{si } s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{si } s_i(x) < 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m$$

que garantice que el estado del sistema alcance la superficie y permanezca en ella de ahí en adelante.

El procedimiento de diseño se simplifica si separamos el sistema en dos componentes, una acoplada a la señal de control y otra perpendicular a ella (ver figura 2.4).

Se dice que un sistema así descrito está en *forma regular*, es decir

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) \quad (2.6a)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) + B_2(x_1, x_2, t)(u + \delta), \quad (2.6b)$$

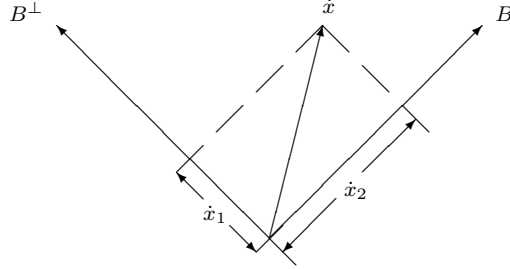


Figura 2.4: Descomposición del sistema.

donde $x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $x_2 \in \mathbb{R}^m$ y B_2 es una matriz no-singular de dimensión $m \times m$. El sistema (2.6a) no depende del control, por lo que se usa x_2 como control virtual y se diseña en función del estado x_1

$$x_2 = -s_0(x_1).$$

Es importante mencionar que el problema de diseño es de orden reducido (una ventaja clara), ya que el sistema (2.6a) es de orden $n - m$. Otra forma de explicar la reducción de orden, es que cuando el estado del sistema alcanza la superficie de discontinuidad, las trayectorias quedan confinadas a dicha superficie, la cual de acuerdo con (2.5) es de dimensión $n - m$. La superficie queda entonces como

$$s(x_1, x_2) = x_2 + s_0(x_1) = 0.$$

Para garantizar la atractividad de la superficie se propone el uso del *control por unidad*. Esta técnica garantiza la existencia del modo deslizante sin la necesidad de seleccionar cada componente individual del control. El control propuesto tiene la forma

$$u = -\rho(x, t) \frac{(GB)^T s(x)}{\|(GB)^T s(x)\|}, \quad G^T = \nabla s(x)$$

donde (GB) se asume no-singular. Nótese que en este caso se tiene la libertad de elegir el control virtual $s_0(x_1)$ y que a partir de éste queda definida s –y por consiguiente G^T .

La derivada de s con respecto al tiempo es

$$\dot{s} = G(f + \phi) + GBu. \tag{2.7}$$

Buscamos que la derivada de la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} s^T s \quad (2.8)$$

sea negativa a lo largo de las trayectorias del sistema. Combinando (2.8) y (2.7) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T G(f + \phi) - \rho(x, t) \frac{s^T (GB)(GB)^T s}{\|(GB)^T s\|} \\ &= s^T G(f + \phi) - \rho(x, t) \|(GB)^T s\| \\ &= s^T (GB)(GB)^{-1} G(f + \phi) - \rho(x, t) \|(GB)^T s\| \\ &\leq \|(GB)^T s\| [\|(GB)^{-1} G(f + \phi)\| - \rho(x, t)], \end{aligned}$$

por lo que si la ganancia $\rho(x, t)$ satisface

$$\rho(x, t) - \|(GB)^{-1} G(f + \phi)\| \geq \rho_0 > 0,$$

entonces el sistema alcanza la superficie $s(x) = 0$ (y de acuerdo con [27] lo hace en tiempo finito).

Antes de proseguir, conviene comentar sobre el fenómeno denominado *chattering* o *castañeteo*. Idealmente, el control conmuta a frecuencia infinita. En la realidad, el control no es capaz de conmutar a frecuencia infinita, exhibe más bien, componentes de frecuencia muy alta. En sistemas mecánicos esto resulta en oscilaciones indeseables que incluso pudieran dañar los equipos. En la sección 2.3 se trata este tema con un poco más de detalle.

Sistemas Lineales

En general, para sistemas no-lineales no es tarea fácil encontrar una transformación de coordenadas que permita escribir al sistema en forma regular. En [27] se muestra una forma cerrada para dicha transformación cuando $m = 1$. Sin embargo, para los sistemas lineales

$$\dot{x} = Ax + B(u + \delta), \quad \text{rank}(B) = m$$

dicha transformación puede determinarse fácilmente para cualquier m . Una posibilidad es

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = Tx, \quad T = \begin{bmatrix} (B^\perp)^+ \\ B^+ \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

2. MODOS DESLIZANTES

En el nuevo sistema de coordenadas

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = TAT^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (B^\perp)^+ \\ B^+ \end{bmatrix} B(u + \delta),$$

es decir

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} (u + \delta).$$

Para estabilizar al sistema de orden reducido $\dot{v}_1 = A_{11}v_1 + A_{12}v_2$, con $v_2 = -Fv_1$ como control virtual, puede utilizarse cualquier técnica de control lineal (asignación de polos, control óptimo, etc). Naturalmente se requiere la controlabilidad (o al menos la estabilizabilidad) del subsistema. Cabe mencionar que la controlabilidad de $\{A, B\}$ implica la de $\{A_{11}, A_{12}\}$. La superficie deslizante quedaría entonces como

$$s(x) = [F \quad I]Tx = 0.$$

Nótese que la suposición ‘ GB no-singular’ se verifica automáticamente, ya que

$$GB = \underbrace{[F \quad I]TB}_G = [F \quad I] \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = I.$$

El cambio de coordenadas T , simplifica también el diseño del control discontinuo

$$u = -(\alpha|v| + \alpha_0) \frac{s}{\|s\|}.$$

La derivada de V con respecto al tiempo resulta en

$$\dot{V} = s^T ((FA_{11} + A_{21})v_1 + (FA_{12} + A_{22})v_2 + \delta) - (\alpha|v| + \alpha_0)\|s\| \quad (2.10)$$

Sólo resta elegir α y α_0 suficientemente grandes (pero finitas), de tal suerte que \dot{V} sea negativa definida.

Invarianza

Analicemos las trayectorias del sistema a lo largo de la superficie de conmutación. Supongamos de ahora en adelante que la perturbación del sistema no satisface la condición de acoplamiento, es decir, existe una componente $B^\perp \eta$ en la perturbación ϕ

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta \\ (u + \delta) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Usando el método del control equivalente obtenemos las ecuaciones de movimiento una vez realizado el modo deslizante.

$$\begin{aligned}
 s &= Fv_1 + v_2 \\
 \dot{s} &= F(A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + \eta) + A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + u + \delta \\
 &\Rightarrow \\
 u_{\text{eq}} &= -F(A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + \eta) - A_{21}v_1 - A_{22}v_2 - \delta. \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo u_{eq} por u en (2.11) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -FA_{11} & -FA_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta \\ -F\eta \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

De la ecuación (2.13) podemos verificar dos cosas. La primera es que las ecuaciones de movimiento son independientes de la perturbación acoplada δ , esto es, el sistema controlado es robusto en cuanto a perturbaciones de este tipo. Y la segunda, es que el sistema efectivamente es de orden reducido, ya que las ecuaciones de movimiento de v_2 dependen linealmente –vía F – de las de v_1 .

El análisis realizado podría repetirse fácilmente para sistemas no-lineales, con lo que se obtendrían las mismas conclusiones.

2.3. Modos Deslizantes Integrales (MDI)

Existen dos problemas principales con los controladores por modos deslizantes. Uno de ellos es que la insensibilidad a perturbaciones acopladas sólo se garantiza una vez que el sistema ha entrado en la superficie deslizante. El otro es el fenómeno de chattering, que resulta debido a que el control discontinuo excita dinámicas no modeladas.

En el control por modos deslizantes integrales se sacrifica la reducción en el orden de las ecuaciones por la robustez desde el primer instante. De acuerdo con [28],

Definición 1 *A un modo deslizante se le denomina modo deslizante integral si la ecuación de movimiento del sistema en este modo deslizante es del mismo orden que la del sistema original.*

Técnicas de diseño

Para controlar al sistema (2.4) se propone una ley de control de la forma

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t),$$

2. MODOS DESLIZANTES

donde $u_1 \in \mathbb{R}^m$ es una acción discontinua diseñada para atraer al estado hacia la superficie de conmutación y así rechazar perturbaciones e incertidumbres acopladas. $u_0 \in \mathbb{R}^m$ es responsable de estabilizar al sistema nominal.

La superficie deslizando se selecciona como

$$\begin{aligned} s(x, t) &= Gx(t) - Gx(t_0) - \\ &\quad - \int_{t_0}^t G[f(x, \tau) + B(x, \tau)u_0(x, \tau)]d\tau \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y una vez más, GB se asume no-singular. El término integral en la parte derecha resulta en una ecuación dinámica de la misma dimensión que la del estado. Una posible interpretación de s , es como un factor que penaliza la diferencia entre la trayectoria deseada $\int_{t_0}^t [f(x, \tau) + B(x, \tau)u_0(x, \tau)]d\tau + x(t_0)$, y la real, proyectada a lo largo de G . A diferencia de los modos deslizando convencionales, G se considera un parámetro de diseño a partir del cual (en conjunto con u_0) queda determinada la superficie s .

El control discontinuo puede diseñarse utilizando la misma técnica del control por unidad

$$u_1(x, t) = -\rho(x) \frac{(GB)^T s(x, t)}{\|(GB)^T s(x, t)\|}.$$

Esta ley de control garantiza la atractividad de la superficie. De hecho, si las condiciones iniciales se conocen con precisión, $s = 0$ está garantizado desde el instante inicial t_0 , lo cual a su vez asegura la propiedad de robustez para todo $t \geq t_0$.

Una posible selección de $\rho(x)$ es

$$\rho(x) > \rho_0 \geq \|(GB)^{-1}G\phi\| \quad (2.14)$$

Utilizando $V(s) = \|s\|^2/2$ como función de Lyapunov verificamos la estabilidad de s

$$\dot{V} = s^T \dot{s}, \quad (2.15)$$

la derivada de s con respecto al tiempo es

$$\begin{aligned}
 \dot{s} &= G\dot{x}(t) - G[f(x, t) + B(x, t)u_0(x, t)] \\
 &= G[f(x, t) + B(x, t)u_0 - B(x, t)\rho(x) \frac{(GB)^T s}{\|(GB)^T s\|} \\
 &\quad + \phi - f(x, t) - B(x, t)u_0] \\
 &= -\rho GB \frac{(GB)^T s}{\|(GB)^T s\|} + G\phi.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Combinando (2.15) y (2.16), se tiene

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -\rho\|(GB)^T s\| + s^T G\phi \\
 &\leq -\|(GB)^T s\| [\rho - \|(GB)^{-1}G\phi\|] \\
 &< 0
 \end{aligned}$$

Entre las ventajas del control por modos deslizantes integrales encontramos que:

- no es necesario escribir el sistema en forma regular, por lo que la metodología puede extenderse fácilmente a sistemas no-lineales;
- la ganancia del control discontinuo sólo debe compensar el efecto de la perturbación, y no la dinámica del sistema, como en el caso de los modos deslizantes convencionales;
- el control u_1 puede procesarse por medio de un filtro pasobajas cuyo ancho de banda se encuentre entre el espectro de las perturbaciones y el de las dinámicas no modeladas de los actuadores, con esto se reduce el chattering;
- dicho control filtrado es una versión aproximada de u_{1eq} , que resulta ser una señal que corresponde a la perturbación, es decir, tenemos un estimador de perturbaciones e incertidumbres.

Invarianza

Antes de aplicar el método del control equivalente descompongamos la perturbación ϕ en sus partes acoplada y desacoplada

$$\phi = B\delta + B^\perp\eta, \quad \delta = B^+\phi, \quad \eta = (B^\perp)^+\phi.$$

2. MODOS DESLIZANTES

La derivada de s es

$$\begin{aligned}\dot{s}(x, t) &= G\dot{x}(t) - G[f(x, t) + B(x, t)u_0(x, t)] \\ &= G[B(x, t)u_1 + B(x, t)\delta + B^\perp(x, t)\eta] = 0.\end{aligned}$$

Resolviendo para el control equivalente se obtiene

$$u_{1\text{eq}} = -\delta - (GB)^{-1}GB^\perp\eta. \quad (2.17)$$

Si sustituimos el control equivalente obtenemos la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, t) + B(x, t)[u_0 + u_{1\text{eq}}] + B(x, t)\delta + B^\perp(x, t)\eta \\ &= f + B[u_0 - \delta - (GB)^{-1}GB^\perp\eta + \delta] + B^\perp\eta \\ &= f + Bu_0 + [I - B(GB)^{-1}G]B^\perp\eta,\end{aligned}$$

de donde podemos ver que la perturbación acoplada ha sido eliminada satisfactoriamente.

A pesar de haber eliminado la incertidumbre acoplada, introducimos una ganancia para la desacoplada. Básicamente, transformamos la perturbación

$$\phi = B\delta + B^\perp\eta$$

en

$$\Gamma B^\perp\eta, \quad \Gamma \triangleq [I - B(GB)^{-1}G].$$

En los textos sobre modos deslizantes normalmente se asume que las perturbaciones e incertidumbres son de tipo acoplado y G se considera un parámetro libre, sólo se pide $\exists (GB)^{-1}$. En este trabajo se determina el parámetro G en función de la perturbación desacoplada. El resultado se presenta en la forma de dos proposiciones.

Proposición 1 *Para cualquier $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ que satisfaga $\text{rank}(B) = m$, y cualquier vector $\beta \in \mathbb{R}^n$, la norma*

$$\| [I - B(GB)^{-1}G] \beta \|^2$$

alcanza su mínimo cuando $G = B^T$.

Prueba: Considérese primero el problema de encontrar el vector $\xi \in \text{span}(B)$ más cercano a un vector arbitrario β , es decir, que minimice $\|\beta - \xi\|$ (ver figura 2.5).

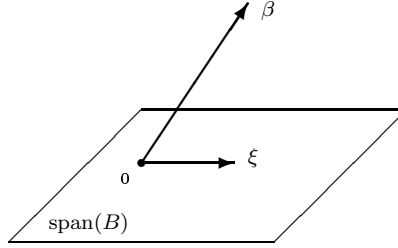


Figura 2.5: Interpretación geométrica del problema.

De acuerdo al Teorema de Proyección [19, p. 51], ξ es un vector único y minimiza $\|\beta - \xi\|$ cuando $\beta - \xi$ es ortogonal a $\text{span}(B)$.

Para resolver el problema anterior, hacemos $\xi = B\alpha$. Esto garantiza $\xi \in \text{span}(B)$. Después buscamos el vector α que hace $\beta - B\alpha$ ortogonal a $\text{span}(B)$, esto es

$$\begin{aligned} 0 &= B^T(\beta - B\alpha) = B^T\beta - B^TB\alpha \\ \alpha &= (B^TB)^{-1}B^T\beta = B^+\beta \end{aligned}$$

La condición $\text{rank}(B) = m$ garantiza que la matriz de Gram B^TB sea invertible. Notando que

$$\|[I - B(B^TB)^{-1}B^T]\beta\| = \|[I - BB^+]\beta\|$$

es mínimo, sólo resta hacer $G = B^T$ para completar la prueba. ■

Cabe mencionar que con $G = B^+$ también se obtiene $\Gamma = [I - BB^+]$, por lo que $G = B^+$ también minimiza el efecto de la perturbación desacoplada.

Proposición 2 para $m < n$ se cumple la siguiente identidad:

$$\|\Gamma\| = \|I - BB^+\| = 1$$

Prueba: Nótese primero que

$$\begin{aligned} \Gamma^T\Gamma &= [I - B(B^TB)^{-1}B^T][I - B(B^TB)^{-1}B^T] \\ &= I - B(B^TB)^{-1}B^T - B(B^TB)^{-1}B^T + \\ &\quad + B(B^TB)^{-1}B^TB(B^TB)^{-1}B^T \\ &= I - B(B^TB)^{-1}B^T = \Gamma, \end{aligned}$$

de donde se deduce que Γ es una matriz simétrica, por lo que todos sus valores característicos son reales. Supóngase que v es un eigen-vector asociado a cualquier eigen-valor λ de Γ , es decir,

$$\begin{aligned}\Gamma v &= \lambda v \\ \Rightarrow \\ v^T \Gamma^T \Gamma v &= \lambda^2 \|v\|^2.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Pero, dado que $\Gamma^T \Gamma = \Gamma$ tenemos que

$$v^T \Gamma^T \Gamma v = v^T \Gamma v = \lambda \|v\|^2.\tag{2.19}$$

De (2.18) y (2.19), vemos que los valores característicos de Γ deben satisfacer

$$\lambda^2 = \lambda.$$

La última ecuación tiene dos soluciones, $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

Como $\text{rank}(BB^+) < n$, el rango de $I - BB^+$ no puede ser 0. Esto quiere decir que Γ debe contener al menos un eigen-valor diferente de cero, es decir, el máximo eigen-valor es uno. El último enunciado significa que $\|\Gamma\| = 1$. ■

Esto es, si hacemos $G = B^+$ la ganancia Γ ya no representa ningún problema. Es más, por la definición de B^\perp ,

$$\begin{aligned}B^+ B^\perp &= 0 \\ [I - BB^+] B^\perp \eta &= B^\perp \eta.\end{aligned}$$

Lo que significa que la perturbación desacoplada no se altera. Las proposiciones 1 y 2 implican que no podemos atenuar la perturbación desacoplada por medio de la componente discontinua u_1 ; y para evitar amplificación, sólo debemos penalizar la diferencia entre la trayectoria deseada y la real, a lo largo de B . Nótese además que, como $\text{rank}(B) = m$, $(GB)^{-1} = (B^T B)^{-1}$ siempre existe. Esta propiedad se cumple también cuando $G = B^+$, lo cual puede comprobarse fácilmente: $B^+ B = I$.

2.4. Ejemplo

Consideremos un sistema mecánico con dos articulaciones, tal como el que se muestra en la figura 2.6. El sistema se compone de dos barras, las cuales se consideran ideales, por lo que los centros

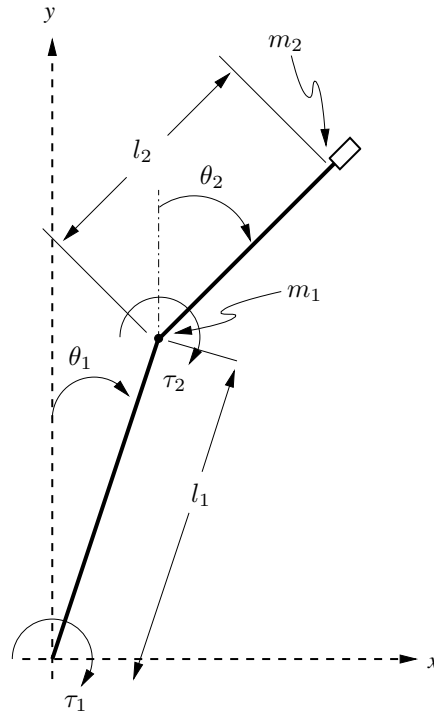


Figura 2.6: Sistema mecánico con dos articulaciones.

de masa se ubican en los extremos. La acción sobre el sistema está dada por las torcas τ_1 y τ_2 . Supongamos que el sistema se somete a perturbaciones sobre cada una de las articulaciones.

Modelo matemático

Para modelar el sistema podemos utilizar el método del Lagrangiano. La energía potencial del sistema es

$$P = (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2,$$

donde g es la aceleración gravitacional; y la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2.$$

2. MODOS DESLIZANTES

El Lagrangiano se define como

$$L = K - P,$$

y las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \tau_i + \delta_i - c_{fi} \dot{\theta}_i, \quad i = 1, 2,$$

donde δ_i son las perturbaciones y c_{fi} son los coeficientes de fricción en las articulaciones.

Para la primera coordenada tenemos

$$(m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 = \tau_1 + \delta_1 - c_{f1} \dot{\theta}_1, \quad (2.20)$$

y para la segunda

$$m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 gl_2 \sin \theta_2 = \tau_2 + \delta_2 - c_{f2} \dot{\theta}_2. \quad (2.21)$$

Escribiendo las ecuaciones (2.20) y (2.21) en forma matricial llegamos a

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} c_{f1} & m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) & c_{f2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} - \\ & - \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 \\ m_2 gl_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 + \delta_1 \\ \tau_2 + \delta_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Despejando $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$ se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= f_1(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \tau_1, \tau_2, \delta_1, \delta_2) \\ \ddot{\theta}_2 &= f_2(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \tau_1, \tau_2, \delta_1, \delta_2) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\alpha} \left[-m_2 \sin \theta \left(\dot{\theta}_1^2 \cos \theta + \frac{l_2}{l_1} \dot{\theta}_2^2 \right) - \frac{c_{f1} \dot{\theta}_1}{l_1^2} + \frac{c_{f2} \dot{\theta}_2 \cos \theta}{l_1 l_2} + \right. \\ & \left. + \frac{m g \sin \theta_1 - m_2 g \sin \theta_2 \cos \theta}{l_1} + \frac{1}{l_1^2} (\tau_1 + \delta_1) - \frac{\cos \theta}{l_1 l_2} (\tau_2 + \delta_2) \right] \end{aligned}$$

y

$$f_2 = \frac{1}{\alpha} \left[\text{sen } \theta \left(\frac{ml_1}{l_2} \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 m_2 \cos \theta \right) + \frac{c_{f1}}{l_1 l_2} \dot{\theta}_1 \cos \theta - \frac{mc_{f2}}{m_2 l_2^2} \dot{\theta}_2 + \frac{mg \text{sen } \theta_2 - mg \text{sen } \theta_1 \cos \theta}{l_2} - \frac{\cos \theta}{l_1 l_2} (\tau_1 + \delta_1) + \frac{m}{m_2 l_2^2} (\tau_2 + \delta_2) \right]$$

donde $\alpha = m_1 + m_2 \text{sen}^2 \theta$, $\theta = \theta_1 - \theta_2$ y $m = m_1 + m_2$.

Haciendo $x = \text{col}(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$, $u = \text{col}(\tau_1, \tau_2)$, $\delta = \text{col}(\delta_1, \delta_2)$ y linealizando alrededor del origen tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= f_1(0) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_0 x + \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_0 u + \left. \frac{\partial f_1}{\partial \delta} \right|_0 \delta + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta) \\ \dot{x}_4 &= f_2(0) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_0 x + \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_0 u + \left. \frac{\partial f_2}{\partial \delta} \right|_0 \delta + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta). \end{aligned}$$

Las derivadas parciales están dadas por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_0 &= \frac{1}{m_1} \begin{bmatrix} \frac{mg}{l_1} & -\frac{m_2 g}{l_2} & -\frac{c_{f1}}{l_1^2} & \frac{c_{f2}}{l_1 l_2} \end{bmatrix} \\ \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_0 &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial \delta} \right|_0 = \frac{1}{m_1 l_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1} & -\frac{1}{l_2} \end{bmatrix} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_0 &= \frac{1}{m_1} \begin{bmatrix} -\frac{mg}{l_2} & \frac{mg}{l_2} & \frac{c_{f1}}{l_1 l_2} & -\frac{mc_{f2}}{m_2 l_2^2} \end{bmatrix} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_0 &= \left. \frac{\partial f_2}{\partial \delta} \right|_0 = \frac{1}{m_1 l_2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_1} & \frac{m}{m_2 l_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Supongamos que se tienen los siguientes parámetros

Parámetro	Valor	
m_1	0.3	[kg]
m_2	0.8	[kg]
m	1.1	[kg]
g	9.81	[m/s ²]
l_1	0.85	[m]
l_2	0.7	[m]
c_{f1}	0.4	[kg/s]
c_{f2}	0.4	[kg/s].

2. MODOS DESLIZANTES

Entonces el sistema queda descrito como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 42.3 & -37.4 & -1.8 & 2.2 \\ -51.4 & 51.4 & 2.2 & -9.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4.6 & -5.6 \\ -5.6 & 9.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 + \delta_1 + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta) \\ u_2 + \delta_2 + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta) \end{bmatrix}. \quad (2.22) \end{aligned}$$

Control MD

La transformación

$$T = \begin{bmatrix} -0.6357 & -0.7719 & 0 & 0 \\ 0.7719 & -0.6357 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7947 & 0.4760 \\ 0 & 0 & 0.4760 & 0.3920 \end{bmatrix}$$

expresa al sistema en la forma regular

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{v}_{1,1} \\ \dot{v}_{1,2} \\ \dot{v}_{2,1} \\ \dot{v}_{2,2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.3916 & -3.6591 \\ 0 & 0 & 7.1228 & -10.2708 \\ -1.7850 & 10.4124 & 13.1205 & -22.7470 \\ -1.8174 & -1.4967 & 14.5658 & -24.3197 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 + \delta_1 + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta) \\ u_2 + \delta_2 + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para estabilizar al sistema de orden reducido

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{1,1} \\ \dot{v}_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.3916 & -3.6591 \\ 7.1228 & -10.2708 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix}$$

podemos, por ejemplo, utilizar un control óptimo (LQR) [2]. El funcional

$$J = \int_0^\infty 10 \|v_1(\tau)\|^2 + \|v_2(\tau)\|^2 d\tau$$

es mínimo cuando

$$v_2 = - \begin{bmatrix} -2.0103 & 2.4411 \\ -2.4411 & -2.0103 \end{bmatrix} v_1.$$

La superficie queda entonces definida como

$$\begin{aligned} s(x) &= \begin{bmatrix} -2.0103 & 2.4411 & 1 & 0 \\ -2.4411 & -2.0103 & 0 & 1 \end{bmatrix} T x \\ &= \begin{bmatrix} 3.1623 & 0 & 0.7947 & 0.4760 \\ 0 & 3.1623 & 0.4760 & 0.3920 \end{bmatrix} x. \end{aligned}$$

Para el control

$$u(x) = -\rho(x) \frac{s}{\|s\|},$$

buscamos la ganancia $\rho(x)$ que satisfaga –ver (2.10)–

$$\begin{aligned} \rho(x) > \left\| \begin{bmatrix} F A_{11} + A_{21} & F A_{12} + A_{22} \end{bmatrix} T \right\| \|x\| + \\ &+ \left\| \begin{bmatrix} \delta_1 + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta) \\ \delta_2 + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta) \end{bmatrix} \right\|. \end{aligned}$$

Supongamos que las perturbaciones están acotadas por

$$|\delta_1| \leq 10, \quad |\delta_2| \leq 10,$$

calculando se obtiene

$$\rho(x) > 92.135\|x\| + 10\sqrt{2} + \|\mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta)\|.$$

El uso de la norma para el cálculo de $\rho(x)$ implica la consideración del peor caso. Para las simulaciones que se llevaron a cabo, $\rho(x)$ se estimó inicialmente usando el cálculo anterior y se ajustó “experimentalmente” como

$$\rho(x) = 20\|x\| + 20.$$

Las condiciones iniciales del sistema fueron $\theta_1(0) = 0.3$, $\theta_2(0) = 0.4$ y $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$. Como perturbaciones se usaron $\delta_1 = \delta_2 = 10 \sin(5t)$.

Es común sustituir el control discontinuo por una aproximación continua. Esto reduce significativamente el chattering y facilita el proceso de simulación. Se puede sustituir, por ejemplo, la función

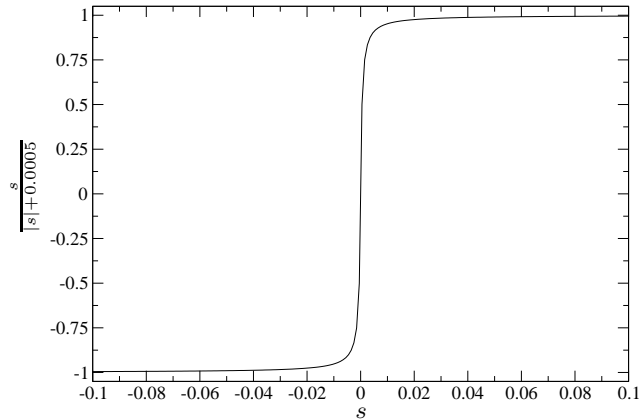


Figura 2.7: Aproximación continua de la función *signum*.

$\text{sign}(s)$ por $s/(|s| + h)$, donde h puede hacerse tan pequeño como se quiera (ver figura 2.7).

Para la simulación de la figura 2.8, se regularizó el control de la siguiente forma:

$$u = -\rho(x) \frac{s}{\|s\| + 0.0005}.$$

Se observa que el control estabiliza satisfactoriamente al sistema. Debido a la regularización del control, la respuesta presenta una ligera oscilación.

Conforme el sistema se aproxima al punto de equilibrio, el control se aproxima a la perturbación, pero con signo opuesto, como muestra la expresión del control equivalente (2.12). Se puede apreciar que la amplitud de los controles durante el transitorio es bastante grande; esto se debe a que inicialmente, el control debe compensar la perturbación y la dinámica del sistema.

Control MDI

Para el control nominal elegimos, una vez más, un control óptimo. Definimos el funcional como

$$J = \int_0^\infty \|x(\tau)\|_Q^2 + \|u(\tau)\|^2 d\tau,$$

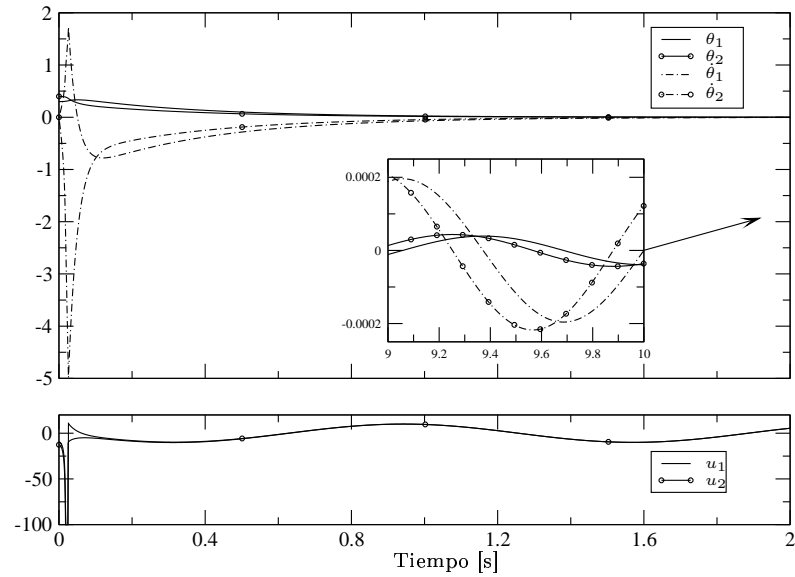


Figura 2.8: Respuesta del sistema usando modos deslizantes convencionales.

con

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El control que minimiza el funcional en ausencia de perturbaciones es

$$u_0 = -Kx = - \begin{bmatrix} 10.7475 & -1.8061 & 2.3394 & 0.4964 \\ -9.5735 & 7.9413 & -1.2748 & 0.4607 \end{bmatrix} x.$$

La superficie queda como

$$s(x, t) = B^+ \left[x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t (A - BK)x(\tau) d\tau \right].$$

2. MODOS DESLIZANTES

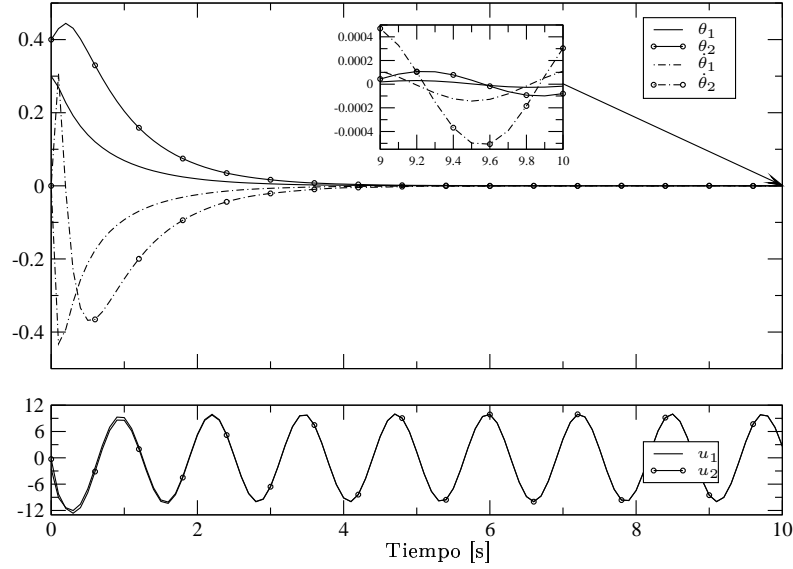


Figura 2.9: Respuesta del sistema usando modos deslizantes integrales.

La ganancia del control discontinuo debe satisfacer –ver (2.14)–

$$\begin{aligned} \rho(x) &> \left\| (GB)^{-1}GB \begin{bmatrix} \delta_1 + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta) \\ \delta_2 + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta) \end{bmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \delta_1 + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta) \\ \delta_2 + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta) \end{bmatrix} \right\|. \end{aligned}$$

Para las mismas perturbaciones tenemos

$$\rho(x) = 10\sqrt{2} + \|\mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta)\|.$$

Para las simulaciones de la figura 2.9, se estableció $\rho(x) = 20$. Las condiciones iniciales fueron las mismas que para el control MD. La amplitud del control durante el transitorio es mucho menor que en el caso MD y el sistema es robusto desde el primer momento.

Capítulo 3

Modos Deslizantes con Criterio \mathcal{H}_∞

Como se vio en el capítulo 2, los modos deslizantes son insensibles a perturbaciones de tipo acoplado, pero sensibles a perturbaciones desacopladas. En dicho capítulo se asumió, además, que las mediciones disponibles corresponden al estado completo. La idea central de este capítulo es diseñar la superficie deslizante usando las técnicas de control \mathcal{H}_∞ para tratar las perturbaciones desacopladas, y en casos particulares, relajar la suposición de que se cuenta con todo el estado.

3.1. Introducción al control \mathcal{H}_∞

En esta sección se hace una pequeña revisión al problema de control \mathcal{H}_∞ en el espacio de estados, tal como se presenta en [9], donde la metodología se compara con la propuesta en la teoría de control \mathcal{H}_2 , originalmente denominada Lineal Cuadrática Gaussiana (LQG).

En la figura 3.1 se muestra el diagrama de bloques más general de un sistema de control [8, p. 6], donde a Ge se le llama la planta generalizada y K es el controlador. La salida z es un variable de penalización que podría por ejemplo, contener una señal de error; y se compone de las mediciones disponibles; u es la entrada de control y w contiene todas las entradas externas, incluyendo perturbaciones,

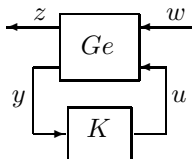


Figura 3.1: Diagrama de bloques de un sistema de control

ruido en los sensores y señales de referencia. La función de transferencia de w a z se denota T_{zw} .

El objetivo es minimizar $\|T_{zw}\|_\infty$, donde la norma \mathcal{H}_∞ , definida en el dominio de la frecuencia de una matriz de transferencia estable $G(s)$ es

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\omega} \sigma_{max}[G(j\omega)].$$

Con este objetivo en mente, los algoritmos de control \mathcal{H}_∞ y \mathcal{H}_2 pueden ponerse en el mismo contexto. De acuerdo con [9], el problema LQG, trasladado al dominio de la frecuencia (esto es, \mathcal{H}_2) puede formularse como un problema de minimización de $\|T_{zw}\|_2$.

La minimización de las normas euclídea e infinito tiene varias interpretaciones, una de ellas es en términos de energía. En el caso \mathcal{H}_∞ podemos pensar en términos de minimización de la energía *total* de z , mientras que en el caso \mathcal{H}_2 , podemos pensar en términos de minimización de la energía *puntual*.

Se produce un resultado interesante cuando en sentido inverso, el problema de control \mathcal{H}_∞ se traslada al dominio del tiempo. En el caso general, el controlador en el espacio de estados tiene una estructura tipo estimador-retro de estado, similar a la de los controladores LQG.

A pesar de las similitudes descritas, existe una diferencia fundamental: cuando se utiliza la norma infinita, sólo es posible encontrar soluciones explícitas para $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, donde γ es mayor al valor óptimo. Para encontrar el óptimo, se requiere una búsqueda. Esto contrasta con \mathcal{H}_2 , donde la γ óptima puede calcularse directamente. Aunque la comparación entre \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ no es estrictamente necesaria en el análisis, definitivamente proporciona intuición en el problema de control \mathcal{H}_∞ .

El problema de control \mathcal{H}_∞

El problema de control \mathcal{H}_∞ puede plantearse de la siguiente forma: encontrar un controlador K tal que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$. La satisfacción de esta norma establece una relación entrada-salida, pero no establece explícitamente una cota para el estado del sistema. Se requiere entonces, una característica adicional: *estabilidad interna*. Por estabilidad interna nos referimos a que los estados de Ge y K van a cero para cualquier estado inicial cuando $w = 0$. Un controlador K que estabiliza internamente se denomina *admisibile*.

Solución al problema \mathcal{H}_∞

La solución requiere de algunos supuestos. La planta generalizada se considera de la forma

$$Ge(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right].$$

Ge puede escribirse en el dominio del tiempo como

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \quad (3.1a)$$

$$z = C_1x + D_{12}u \quad (3.1b)$$

$$y = C_2x + D_{21}w, \quad (3.1c)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, $w \in \mathbb{R}^q$, $z \in \mathbb{R}^r$ y todas las matrices son de dimensión apropiada.

Supuesto 1 $\{A, B_1\}$ es estabilizable y $\{C_1, A\}$ es detectable.

Supuesto 2 $\{A, B_2\}$ es estabilizable y $\{C_2, A\}$ es detectable.

Supuesto 3

$$D_{12}^T [C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I]$$

Supuesto 4

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

3. MODOS DESLIZANTES CON CRITERIO \mathcal{H}_∞

Los supuestos 1 y 2 garantizan la equivalencia entre estabilidad interna y estabilidad entrada-salida ($T_{zw} \in \mathcal{RH}_\infty$). El supuesto 3 significa que z no contiene términos cruzados entre el estado y el control, y que la matriz de peso que se le da al control está normalizada. Este supuesto se utiliza solamente para simplificar las fórmulas desarrolladas y puede relajarse por medio de una transformación de coordenadas. El supuesto 4 es dual a 3 y se refiere a la forma en que la señal exógena w entra en Ge : w incluye tanto perturbaciones en la planta como ruido en los sensores, estos son ortogonales, y el peso que se le da al ruido en los sensores está normalizado y es no-singular.

Teorema 1 ([9, teorema 3]) *Dados los supuestos 1-4, existe un controlador admisible tal que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ si y sólo si, las siguientes tres condiciones se cumplen*

1. *Existe una matriz real, positiva semi-definida X_∞ que satisface la ecuación de Riccati*

$$A^T X_\infty + X_\infty A - X_\infty (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) X_\infty + C_1^T C_1 = 0. \quad (3.2)$$

2. *Existe una matriz real, positiva semi-definida Y_∞ que satisface la ecuación de Riccati*

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T - Y_\infty (C_2^T C_2 - \gamma^{-2} C_1^T C_1) Y_\infty + B_1 B_1^T = 0. \quad (3.3)$$

3. *El radio espectral de $X_\infty Y_\infty$ es menor que γ^2 .*

Es más, cuando se cumplen estas condiciones, dicho controlador puede realizarse como

$$K_{\text{sub}}(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array} \right] \quad (3.4)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{A}_\infty &\triangleq A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \\ F_\infty &\triangleq -B_2^T X_\infty, \quad L_\infty \triangleq -Y_\infty C_2^T \\ Z_\infty &\triangleq (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}. \end{aligned}$$

El controlador (subóptimo) K_{sub} en (3.4) puede realizarse con una estructura estimador-retro de estado como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B_1\hat{w}_{\text{worst}} + B_2u + Z_\infty L_\infty(C_2\hat{x} - y) \\ u &= F_\infty\hat{x}, \quad \hat{w}_{\text{worst}} = \gamma^{-2}B_1^T X_\infty\hat{x}.\end{aligned}$$

Esta estructura es similar a la de un controlador LQG. Para el caso general (retro de salida) se requiere en ambos casos la solución a dos ecuaciones de Riccati. Como en el caso \mathcal{H}_2 , cuando se dispone del estado completo, sólo se requiere la solución a una de las ecuaciones, la (3.2); y cuando se considera únicamente el problema de estimación sólo es necesario resolver la ecuación (3.3). Es interesante notar que conforme $\gamma \rightarrow \infty$, el controlador \mathcal{H}_∞ se aproxima al controlador \mathcal{H}_2 . Esto puede verificarse fácilmente observando las ecuaciones de Riccati y la realización del controlador (3.4).

Una forma de interpretar la norma infinita de la matriz de transferencia $G(s)$, es en términos de la ganancia del sistema. A modo de ejemplo, pensemos en el caso SISO (una entrada, una salida). Supongamos que al sistema se le aplica una entrada $w \in \mathcal{L}_2$ y consideremos la salida z

$$\begin{aligned}\|z\|_{\mathcal{L}_2}^2 &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} z^2(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 |\bar{w}(j\omega)|^2 d\omega,\end{aligned}$$

donde \bar{w} es la transformada de Laplace de w .

$$\|z\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \|G\|_\infty^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{w}(j\omega)|^2 d\omega = \|G\|_\infty^2 \|w\|_{\mathcal{L}_2}^2.$$

Es decir, la norma \mathcal{H}_∞ en el dominio de la frecuencia y la norma \mathcal{L}_2 inducida de un sistema lineal en el dominio del tiempo son equivalentes. Esta equivalencia se da también para el caso general (MIMO), es decir,

$$\|G\|_\infty = \sup_{w \in \mathcal{B}\mathcal{L}_2} \|z\|_{\mathcal{L}_2}. \quad (3.5)$$

La última igualdad permite entender el problema de \mathcal{H}_∞ en términos de *atenuación de perturbaciones*, determinar la estabilidad en términos de funciones de Lyapunov y generalizar los conceptos de \mathcal{H}_∞ a sistemas no-lineales.

Teorema 2 ([16]) *Supóngase que,*

1. *Los supuestos 1 a 4 se cumplen.*
2. *Las condiciones del teorema 1 se satisfacen con X_∞ positiva definida.*

Entonces, el controlador K_{sub} en (3.4) es admisible y

$$\int_0^T z^T(s)z(s)ds \leq \gamma^2 \int_0^T w^T(s)w(s)ds$$

se cumple cuando $x(0) = \hat{x}(0) = 0$ para cualquier $T > 0$.

Es más, la función candidata de Lyapunov

$$V(x, \hat{x}) = x^T X_\infty x + \gamma^2 (x - \hat{x})^T (Z_\infty Y_\infty)^{-1} (x - \hat{x})$$

satisface

$$\dot{V} \leq -\|C_1 x\|^2 - \|u\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2.$$

3.2. Combinación de las dos Técnicas

Hasta este punto se han presentado dos técnicas de control, ambas enfocadas a la robustez. En esta sección se hace un esfuerzo por combinar las dos técnicas. Primero se hace un análisis comparativo entre las dos técnicas; después se combinan las técnicas cuando es posible retro-alimentar el estado; y finalmente, se combinan cuando sólo es posible retro-alimentar la salida.

Retro de estado con condición de acoplamiento

Cuando se dispone de todo el estado y se cumple la condición de acoplamiento, los modos deslizantes son capaces de eliminar por completo las perturbaciones. La superficie deslizante puede diseñarse entonces sin considerar perturbaciones, usando \mathcal{H}_2 por ejemplo. La combinación de \mathcal{H}_∞ y modos deslizantes resulta pues, innecesaria; la alternativa es realizar un análisis comparativo entre las dos técnicas. El criterio para evaluar la robustez es el propuesto por el control \mathcal{H}_∞ , es decir, la ganancia \mathcal{L}_2 entre la perturbación w y el error z .

Bajo los supuestos establecidos, podemos escribir al sistema como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_2w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{12}u \\ y &= x.\end{aligned}$$

En el caso de los modos deslizantes integrales, el control equivalente está dado por

$$u_{1eq} = -\delta - (GB)^{-1}GB^\perp\eta,$$

ver (2.17, p. 18). Cuando se satisface la condición de acoplamiento $\eta = 0$ y $\delta = w$, por lo que el control equivalente es igual a la perturbación, pero con signo inverso. Dado que la perturbación se elimina por completo, el estado y el control nominal u_0 se mantienen en cero para condiciones iniciales nulas. La suposición de condiciones nulas se debe a que el problema de control \mathcal{H}_∞ está planteado en términos de funciones de transferencia.

La norma de z es

$$\int_0^T z^T z dt = \int_0^T \|C_1x + D_{12}u_0 + D_{12}u_{1eq}\|^2 dt = \int_0^T w^T w dt.$$

Esto es, el índice de desempeño en el caso de los modos deslizantes integrales es siempre igual a 1

$$\gamma_{MDI} = 1.$$

En el caso MD con condiciones iniciales nulas, el control equivalente también es igual a la perturbación, pero con signo inverso, ver (2.12, p. 15), por lo que

$$\gamma_{MD} = 1.$$

Cuando se utiliza la metodología \mathcal{H}_∞ , buscamos la γ más pequeña que satisfaga

$$A^T X_\infty + X_\infty A - X_\infty (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_2 B_2^T) X_\infty + C_1^T C_1 = 0$$

con $X_\infty \geq 0$, es decir,

$$A^T X_\infty + X_\infty A - (1 - \gamma^{-2}) X_\infty (B_2 B_2^T) X_\infty + C_1^T C_1 = 0. \quad (3.6)$$

Como ya habíamos dicho, no podemos determinar γ_{opt} *a priori*; pero podemos establecer un resultado interesante. Antes de presentarlo es necesario introducir el siguiente teorema.

Teorema 3 (Conjunto Invariante [26, p. 73]) *Considérese el sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$, donde f es continua, y sea $V(x)$ una función escalar cuyas derivadas parciales de primer orden sean continuas. Asíumase que*

- $\dot{V}(x) \leq 0$ en todo el espacio de estados.
- $V(x) \rightarrow \infty$ conforme $\|x\| \rightarrow \infty$.

Sea R el conjunto de puntos para los cuales $\dot{V}(x) = 0$, y M el conjunto invariante más grande en R . Entonces todas las soluciones convergen global y asintóticamente a M conforme $t \rightarrow \infty$.

El resultado prometido se establece en la siguiente proposición.

Proposición 3 *Si la matriz A no es estable, entonces $\gamma_{\text{opt}} > 1$.*

Prueba: La demostración es por reducción al absurdo. Supongamos que A no es Hurwitz y que $\gamma_{\text{opt}} \leq 1$. La última condición (junto con $X_\infty \geq 0$) implica que la matriz

$$N = -(1 - \gamma_{\text{opt}}^{-2})X_\infty(B_2B_2^T)X_\infty + C_1^T C_1$$

es positiva semi-definida.

La ecuación (3.6) puede reescribirse como la ecuación matricial de Lyapunov

$$\begin{aligned} A^T X_\infty + X_\infty A &= -N = -H^T H, \\ H^T &= \left[\sqrt{-(1 - \gamma_{\text{opt}}^{-2})} X_\infty B_2 \quad C_1^T \right]. \end{aligned}$$

Recuérdese que la estabilidad de A se define en términos de la estabilidad del sistema autónomo

$$\dot{x} = Ax.$$

Consideremos la función escalar $V(x) = x^T X_\infty x$. Tenemos entonces que

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T X_\infty + X_\infty A)x = -x^T N x \leq 0.$$

En términos del teorema 3, es claro que $R = \ker(H)$. La estructura de H significa que $R = \ker(B_1^T X_\infty) \cap \ker(C_1)$.

Como es de esperarse, existen valores de x diferentes de cero, para los cuales $C_1 x$ es igual a cero, es decir,

$$\ker(C_1) \neq \{0\}.$$

Una forma de interpretar la detectabilidad de $\{A, C_1\}$, es que las trayectorias que pertenecen a $\ker(C_1)$ son asintóticamente estables; esto quiere decir que M consta de un sólo punto, el cero, y que éste es un punto de equilibrio global y asintóticamente estable. Lo anterior implica que los eigen-valores de A deben ser estrictamente menores que cero, lo cual, contradice el supuesto inicial. ■

Podemos resumir el resultado del análisis en el siguiente cuadro:

	MDI	MD	\mathcal{H}_∞	
			$A \notin \text{Hurwitz}$	$A \in \text{Hurwitz}$
Ganancia \mathcal{L}_2	$\gamma = 1$	$\gamma = 1$	$\gamma > 1$	$\gamma = ?$

Cabe mencionar que en el caso del control \mathcal{H}_∞ , la minimización se hace suponiendo que se trata de un controlador lineal, esto explica el hecho de que usando modos deslizantes pueda diseñarse un controlador cuyo índice de desempeño supera el *óptimo*. Cabe mencionar también, que en el caso de los modos deslizantes integrales, el índice de desempeño mostrado en el cuadro anterior es válido siempre y cuando la magnitud de la perturbación no supere la cota usada en el diseño del controlador. El controlador \mathcal{H}_∞ , por el contrario, garantiza el índice de desempeño para cualquier perturbación.

Retro de estado sin condición de acoplamiento

Hemos retirado la suposición de que la condición de acoplamiento se cumple, pero mantenemos por el momento, la suposición de que el estado es medible. Dadas las ventajas que presentan los modos deslizantes integrales con respecto a los convencionales (ver p. 17), combinamos en esta sección, los modos deslizantes integrales y el control \mathcal{H}_∞ .

Podemos proyectar una vez más la perturbación:

$$B_1 w = \bar{\Gamma} B_1 w + \Gamma B_1 w,$$

donde

$$\bar{\Gamma} = B_2 B_2^+ \quad \text{y} \quad \Gamma = B_2^\perp B_2^{\perp+}.$$

Definimos la superficie deslizante como

$$s(x, t) = B_2^+ \left[x(t) - x_0 - \int_{t_0}^t (Ax(\tau) + B_2 u_0) d\tau \right].$$

3. MODOS DESLIZANTES CON CRITERIO \mathcal{H}_∞

Su derivada con respecto al tiempo es

$$\begin{aligned}\dot{x}(x, t) &= B_2^+ [Ax(t) + \bar{\Gamma}B_1w + \Gamma B_1w + B_2(u_0 + u_1)] \\ &\quad - B_2^+ [Ax(t) + B_2u_0] \\ &= B_2^+ B_1w + u_1\end{aligned}$$

y el control equivalente es igual a

$$u_{1\text{eq}} = -B_2^+ B_1w.$$

Sustituyéndolo en la ecuación dinámica obtenemos

$$\dot{x} = Ax + \Gamma B_1w + B_2u_0. \quad (3.7)$$

El control nominal u_0 puede determinarse resolviendo la ecuación de Riccati

$$A^T X_\infty + X_\infty A - X_\infty B_2 B_2^T X_\infty + \gamma^{-2} X_\infty \Gamma B_1 B_1^T \Gamma X_\infty + C_1^T C_1 = 0$$

y haciendo

$$u_0 = -B_2^T X_\infty x.$$

Ejemplo

Cuando se trata de sistemas mecánicos, las perturbaciones siempre son acopladas si el sistema está completamente actuado. En el siguiente ejemplo se trata con un sistema sub-actuado y con perturbaciones desacopladas. Al sistema de la figura 2.6 se le llama comúnmente *pendubot* cuando sólo es posible ejercer una acción sobre la articulación inferior. Cuando sólo tenemos τ_1 para controlar al sistema, el modelo queda descrito como –ver (2.22)–

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 42.3 & -37.4 & -1.8 & 2.2 \\ -51.4 & 51.4 & 2.2 & -9.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4.6 & -5.6 \\ -5.6 & 9.4 \end{bmatrix}}_{B_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_1 + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta) \\ \delta_2 + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta) \end{bmatrix}}_w + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.6 \\ -5.6 \end{bmatrix}}_{B_2} u. \quad (3.8)\end{aligned}$$

Las perturbaciones pueden descomponerse como

$$B_1 w = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4.6 & -6.9 \\ -5.6 & 8.3 \end{bmatrix}}_{B_2 B_2^+ B_1} w + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1.3 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}}_{B_2^\perp B_2^{\perp+} B_1} w.$$

La parte izquierda se encuentra acoplada al control y será eliminada por la componente discontinua u_1 ; la derecha está desacoplada y se tratará con la componente continua u_0 mediante la técnica \mathcal{H}_∞ .

Definimos la variable de error como

$$z = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_1} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{D_{12}} u$$

Buscamos una $X_\infty \geq 0$ y la $\gamma > 0$ más pequeña que satisfaga

$$A^T X_\infty + X_\infty A - X_\infty B_2 B_2^T X_\infty + \gamma^{-2} X_\infty (B_2^\perp B_2^{\perp+} B_1) (B_2^\perp B_2^{\perp+} B_1)^T X_\infty + C_1^T C_1 = 0.$$

La solución es

$$X_\infty = \begin{bmatrix} 1321 & 12924 & 2092 & 1737 \\ 12924 & 129735 & 20932 & 17417 \\ 2092 & 20932 & 3379 & 2810 \\ 1737 & 17417 & 2810 & 2339 \end{bmatrix}, \quad \gamma = 50,$$

y el control nominal

$$u_0 = -Kx = -B_2^T X_\infty x = [80 \quad 1003 \quad 157 \quad 133] x.$$

La superficie queda como

$$s(x, t) = B_2^+ \left[x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t (A - BK)x(\tau) d\tau \right].$$

3. MODOS DESLIZANTES CON CRITERIO \mathcal{H}_∞

La figura 3.2 representa la respuesta del sistema cuando $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0.1$, $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ y $\delta_1 = \delta_2 = 0.5 \sin(5t)$. El control discontinuo se regularizó de la siguiente forma:

$$u_1 = -\rho(x) \frac{s}{|s| + 0.0008}.$$

$\rho(x)$ se estableció “experimentalmente” en $\rho(x) = 5$. En la figura se puede observar que $B_2 u_1$ es igual a la perturbación acoplada, esto es,

$$\begin{aligned} B_2 u_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.6 \\ -5.6 \end{bmatrix} w_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6.9 \\ 8.3 \end{bmatrix} w_2 \\ &= B_2(-0.243 \sin(5t) + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta)). \end{aligned}$$

La respuesta del sistema presenta oscilaciones debido a que el control nominal no elimina completamente el efecto de las perturbaciones desacopladas, simplemente lo acota.

Retro de salida sin condición de acoplamiento

En general, al diseñar un control por modos deslizantes se asume que las mediciones del sistema corresponden al estado completo. Cuando no es posible medir todo el estado, podría pensarse en utilizar un estimador en serie con el controlador. El siguiente análisis muestra porque ese enfoque no funcionaría.

Consideremos el sistema perturbado

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (3.9a)$$

$$z = C_1 x + D_{12} u \quad (3.9b)$$

$$y = C_2 x. \quad (3.9c)$$

Supongamos que se implementa un observador de Luenberger (se podría hacer un análisis similar para otro tipo de estimador)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 u - L_2 C_2 e, \quad e = x - \hat{x}.$$

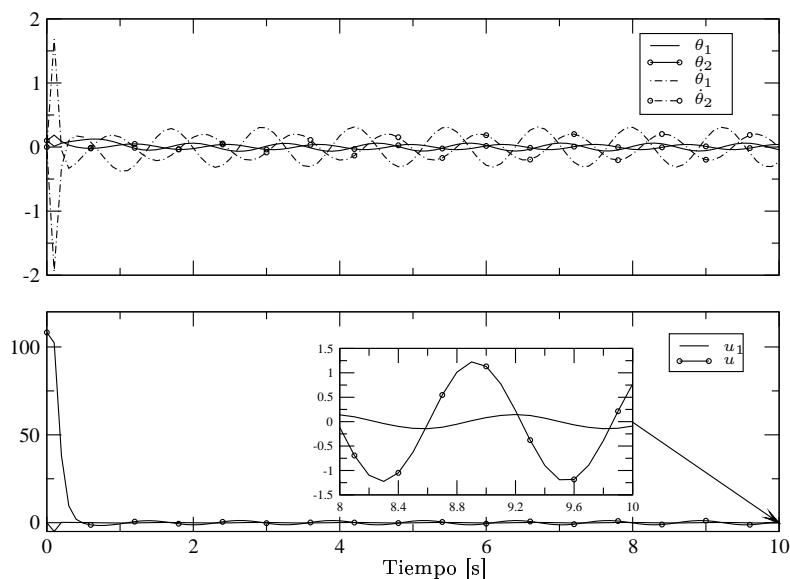


Figura 3.2: Respuesta del sistema usando modos deslizantes integrales y \mathcal{H}_∞ .

Para un control por modos deslizantes integrales tenemos

$$\begin{aligned}
 s &= B_2^+ \left[\hat{x}(t) - \hat{x}(t_0) - \int_{t_0}^t (A\hat{x} + B_2 u_0) d\tau \right] \\
 \dot{s} &= B_2^+ [A\hat{x} + B_2(u_0 + u_1) - L_2 C_2 e - A\hat{x} - B_2 u_0] \\
 &= B_2^+ [B_2 u_1 - L_2 C_2 e]
 \end{aligned}$$

y el control equivalente

$$u_{1eq} = -B_2^+ L_2 C_2 e.$$

Podemos observar que el control equivalente ni siquiera contiene la perturbación w , ya que ha sido filtrada por el estimador. El resultado es que la perturbación se mantiene intacta, como podemos comprobar al sustituir el control equivalente en las ecuaciones de movimiento

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u_0 - B_2 B_2^+ L_2 C_2 e.$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2^{\perp+} B_1 w \\ u + (C_2 B_2)^+ C_2 B_1 w \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} (I - C_2 B_2 (C_2 B_2)^+) C_2 B_2^{\perp} & C_2 B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La transformación

$$\bar{y} = T_y y, \quad T_y := \begin{bmatrix} (C_2 B_2)^{\perp+} \\ (C_2 B_2)^+ \end{bmatrix}$$

en la *salida* nos lleva a

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \begin{bmatrix} (C_2 B_2)^{\perp+} \\ (C_2 B_2)^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I - C_2 B_2 (C_2 B_2)^+) C_2 B_2^{\perp} & C_2 B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{C} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con

$$\bar{C} = (C_2 B_2)^{\perp+} C_2 B_2^{\perp}.$$

Esta forma en particular permite usar v_2 como control virtual para el sistema de orden reducido

$$\dot{v}_1 = A_{11} v_1 + A_{12} v_2 + B_2^{\perp+} B_1 w; \quad (3.10)$$

v_2 puede obtenerse mediante una simple transformación en las variables de medición ($v_2 = \bar{y}_2 = (C_2 B_2)^+ y$), por lo que sólo es necesario estimar v_1 .

Supongamos que las condiciones del teorema 1 se cumplen con

$$\begin{aligned} B_{1r} &\leftarrow B_2^{\perp+} B_1 & C_{1r} &\leftarrow I & A_r &\leftarrow A_{11} \\ B_{2r} &\leftarrow A_{12} & C_{2r} &\leftarrow \bar{C} \end{aligned}$$

Podemos estimar v_1 como

$$\dot{\hat{v}}_1 = A_{11} \hat{v}_1 + A_{12} v_2 + B_{1r} \hat{w}_{\text{worst}} + Z_{\infty} L_{\infty} (\bar{C} \hat{v}_1 - \bar{y}_1),$$

usar la ley de control virtual

$$v_2 = \bar{y}_2 = F_{\infty} \hat{v}_1,$$

3. MODOS DESLIZANTES CON CRITERIO \mathcal{H}_∞

y determinar la superficie deslizante (dinámica) como

$$s = [-F_\infty \quad I] \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.11)$$

Para determinar la dinámica en la superficie deslizante aplicamos el método del control equivalente,

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -F_\infty \dot{\hat{v}}_1 + \dot{\hat{y}}_2 = -F_\infty \dot{\hat{v}}_1 + \dot{v}_2 \\ &= -F_\infty \dot{\hat{v}}_1 + A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + (C_2B_2)^+ C_2B_1w + u \\ u_{\text{eq}} &= -(A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + (C_2B_2)^+ C_2B_1w) + F_\infty \dot{\hat{v}}_1. \end{aligned}$$

La dinámica en la superficie deslizante es

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + B_2^{\perp+} B_1w \\ \dot{v}_2 &= A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + (C_2B_2)^+ C_2B_1w + u_{\text{eq}}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= A_{11}v_1 + A_{12}F_\infty \hat{v}_1 + B_2^{\perp+} B_1w \\ \dot{v}_2 &= F_\infty \dot{\hat{v}}_1, \end{aligned}$$

de donde se puede observar que la perturbación acoplada ha sido eliminada satisfactoriamente.

Ejemplo

Supongamos que para el pendubot descrito en (3.8), sólo es posible medir las siguientes variables

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_2} x.$$

La transformación

$$\begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ v_{1,3} \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.637 & 0 & 0.596 & 0.491 \\ 0.779 & 0 & 0.491 & 0.404 \\ 0 & 0.088 & 0.088 & -0.106 \end{bmatrix}}_T x,$$

expresa al mismo sistema en la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{1,1} \\ \dot{v}_{1,2} \\ \dot{v}_{1,3} \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.491 & 0.491 & 0.404 & -5.602 \\ 1.607 & -1.976 & -1.627 & 15.301 \\ 0.800 & -0.855 & -0.704 & 18.578 \\ -7.950 & -5.442 & 7.401 & -9.010 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ v_{1,3} \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1.252 \\ 0 & 1.031 \\ 1 & -1.486 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_1 + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta) \\ \delta_2 + \mathcal{O}_2(\theta)(u + \delta) \end{bmatrix}}_w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.596 & 1 & 0 & 0 \\ 0.491 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

El sistema de orden reducido es

$$\dot{v}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.491 & 0.491 & 0.404 \\ 1.607 & -1.976 & -1.627 \\ 0.800 & -0.855 & -0.704 \end{bmatrix}}_{A_r} v_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1.25 \\ 1.03 \end{bmatrix}}_{B_{1r}} w_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} -5.60 \\ 15.30 \\ 18.58 \end{bmatrix}}_{B_{2r}} v_2$$

$$\bar{y}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.596 & 1 & 0 \\ 0.491 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_{2r}} v_1.$$

Las condiciones del teorema 1 se satisfacen con

$$X_\infty = \begin{bmatrix} 328 & 36 & 68 \\ 36 & 4.4 & 7.2 \\ 68 & 7 & 14 \end{bmatrix}, \quad Y_\infty = \begin{bmatrix} 1.04 & 0.42 & 0.21 \\ 0.42 & 0.48 & 0.12 \\ 0.21 & 0.12 & 0.53 \end{bmatrix}, \quad \gamma = 22.$$

El estimador \mathcal{H}_∞ para el sistema de orden reducido es, después de algunas manipulaciones –ver (3.4)–

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}_1 &= \begin{bmatrix} -142 & -23 & -26 \\ 368 & 38 & 54 \\ 445 & 48 & 66 \end{bmatrix} \hat{v}_1 + \begin{bmatrix} 8.55 & -6.15 \\ 1.57 & 0.93 \\ 1.79 & 1.75 \end{bmatrix} \bar{y}_1 \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -142 & -23 & -26 \\ 368 & 38 & 54 \\ 445 & 48 & 66 \end{bmatrix}}_{\hat{A}_{r\infty}} \hat{v}_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} -0.68 & 8.11 & 6.68 \\ -0.28 & 1.39 & 1.14 \\ 0.21 & 1.92 & 1.58 \end{bmatrix}}_{-Z_\infty L_\infty (C_2 B_2)^{++}} y \end{aligned} \quad 45$$

3. MODOS DESLIZANTES CON CRITERIO \mathcal{H}_∞

y la superficie

$$\begin{aligned} s &= -[24 \quad 2.71 \quad 3.66] \hat{v}_1 + \bar{y}_2 = 0 \\ &= -\underbrace{[24 \quad 2.71 \quad 3.66]}_{F_\infty} \hat{v}_1 + \underbrace{[0 \quad 0.08 \quad -0.11]}_{(C_2 B_2)^+} y = 0. \end{aligned}$$

Se propone un control

$$u = \rho(y, \hat{v}_1) \text{sign } s,$$

y para estimar la ganancia, usamos la función de Lyapunov $V(s) = s^2/2$.

La derivada de s con respecto al tiempo es

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -F_\infty \dot{\hat{v}}_1 + \dot{v}_2 \\ &= -F_\infty \hat{A}_{r\infty} \hat{v}_1 + F_\infty Z_\infty L_\infty (C_2 B_2)^{\perp+} y + \dot{v}_2 \\ &= -F_\infty \hat{A}_{r\infty} \hat{v}_1 + F_\infty Z_\infty L_\infty (C_2 B_2)^{\perp+} y + \\ &\quad + A_{21}(\hat{v}_1 + \tilde{v}_1) + A_{22}(C_2 B_2)^+ y - \rho(y, \hat{v}_1) \text{sign}(s). \end{aligned}$$

donde $\tilde{v}_1 = v_1 - \hat{v}_1$ es el error de estimación.

La derivada de $V(s)$ es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s \left[A_{21} \tilde{v}_1 + \underbrace{(A_{21} - F_\infty \hat{A}_{r\infty})}_{\Lambda_1} \hat{v}_1 \right] + \\ &\quad + s \left[\underbrace{(A_{22}(C_2 B_2)^+ + F_\infty Z_\infty L_\infty (C_2 B_2)^{\perp+})}_{\Lambda_2} y \right] - \rho |s| \\ &\leq |s| [\|\Lambda_1\| \|\hat{v}_1\| + \|\Lambda_2\| \|y\| + \|A_{21} \tilde{v}_1\| - \rho]. \end{aligned}$$

Por lo que si

$$\begin{aligned} \rho(\hat{v}_1, y) &> \|\Lambda_1\| \|\hat{v}_1\| + \|\Lambda_2\| \|y\| + \|A_{21} \tilde{v}_1\| \\ &> 860 \|\hat{v}\| + 266 \|y\| + 12 \|\tilde{v}_1\| \end{aligned}$$

entonces el sistema alcanzará el modo deslizante en tiempo finito.

La ganancia usada en la simulación fue

$$\rho(\hat{v}_1, y) = 150 \|\hat{v}\| + 80 \|y\| + 20,$$

las condiciones iniciales

$$\theta_1 = \theta_2 = 0.05, \quad \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0, \quad \hat{v}_{1,1} = \hat{v}_{1,2} = \hat{v}_{1,3} = 0,$$

las perturbaciones

$$\delta_1 = \delta_2 = 0.1 \sin(5t)$$

y el control se regularizó como

$$u = -\rho(\hat{v}_1, y) \frac{s}{|s| + 0.01}.$$

Los resultados se muestran en la figura 3.4. Se puede ver que la respuesta del sistema se encuentra acotada. El control presenta un pico muy grande aproximadamente a los dos segundos, pero cuando el sistema se aproxima al punto de equilibrio, el control tiende a la perturbación acoplada.

Es importante mencionar que aunque \mathcal{H}_∞ es una técnica lineal, en la perturbación w se incluyeron los términos no-lineales que resultan de la expansión en serie de Taylor. Las simulaciones, realizadas con el modelo original (no-lineal) muestran la efectividad de la técnica.

3. MODOS DESLIZANTES CON CRITERIO \mathcal{H}_∞

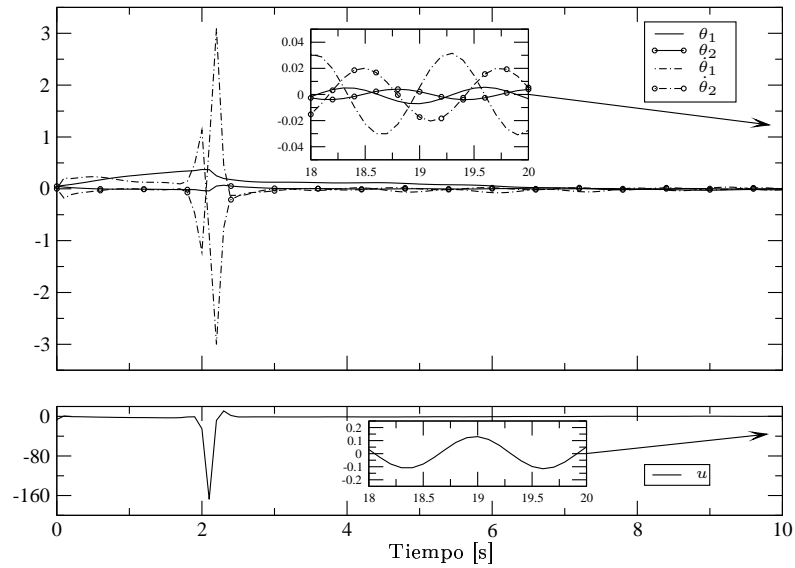


Figura 3.4: Respuesta del sistema usando modos deslizantes convencionales y \mathcal{H}_∞ .

Capítulo 4

Aplicación al Control Descentralizado

En este capítulo se plantea formalmente el problema de control descentralizado, se hace un breve análisis de la literatura y se aplican las técnicas desarrolladas en los capítulos anteriores para resolver dicho problema.

4.1. Motivación

Los sistemas de gran escala pueden requerir el uso de control descentralizado cuando alguna o varias de las siguientes dificultades ocurren:

1. El sistema se encuentra ampliamente distribuido en el espacio, por lo que la transferencia de información es costosa (v.gr. sistemas de potencia);
2. la implementación de una ley de control centralizada es difícil, o incluso imposible debido a la estructura descentralizada del sistema (v.gr. control de tráfico aéreo y terrestre);
3. la complejidad en el análisis y diseño, debida al orden del sistema, puede reducirse al separar el sistema en varios subsistemas (v.gr. estructuras flexibles con muchos grados de libertad);

4. el criterio de diseño es robustez respecto a perturbaciones estructurales, en las que los subsistemas se desconectan y vuelven a conectar mientras el sistema se encuentra en operación.

En términos generales, el problema de control descentralizado es el de encontrar un conjunto de controladores en los que la información está sujeta a una restricción: la información disponible en cada estación de control es sólo un subconjunto de las variables de estado. Los controladores se diseñan para estabilizar un conjunto de subsistemas interconectados, los cuales componen el sistema total.

4.2. Planteamiento del Problema

Consideremos un sistema descentralizado, lineal e invariante en el tiempo, con ν estaciones de control

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(y_i, t) + \sum_{j=1}^{\nu} A_{ij} x_j(t) \quad (4.1a)$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, \nu, \quad (4.1b)$$

donde $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ es el vector de estado, $y_i(t) \in \mathbb{R}^{p_i}$ son las variables de medición y $u_i(x_i, t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ es la acción de control de la i -ésima estación en el tiempo $t \in \mathbb{R}$. A_i , B_i y C_i son matrices de dimensión apropiada. $\sum_{j \neq i}^{\nu} A_{ij} x_j$ representa la influencia de las otras estaciones, donde las A_{ij} son, una vez más, matrices de dimensión apropiada. En lo subsecuente, cuando aparezca el subíndice i , se asume que el enunciado es válido para todo $i = 1, 2, \dots, \nu$.

El objetivo es diseñar cada una de las leyes de control u_i tal que el sistema (4.1) sea semi-global y asintóticamente estable.

Suponemos que la información disponible para la i -ésima estación de control en el tiempo t está representada por

$$I_i(t) = \{y_i(\xi), u_i(\zeta) | \xi \in [0, t], \zeta \in [0, t]\}. \quad (4.2)$$

Se asume también que la entrada de control $u_i(t)$ sólo puede calcularse a partir de $I_i(t)$, es decir,

$$u_i(t) = F_i(I_i(t), t), \quad (4.3)$$

donde $F_i(t)$ es una función de $I_i(t)$ y del tiempo t .

4.3. Resultados Previos (Análisis de la Literatura)

Desde el punto de vista histórico, el desarrollo de las técnicas para el análisis y el diseño de sistemas de control descentralizado sigue un patrón similar al del control centralizado. La primera pregunta que surge es: ¿bajo qué condiciones es posible estabilizar un sistema descentralizado? Este problema fue planteado y –casi– resuelto en [29]. Otra pregunta, íntimamente relacionada con la anterior es: ¿cuándo (y cómo) es posible asignar arbitrariamente los polos de un sistema de esta naturaleza? La respuesta puede encontrarse en [6]. El reto posterior es el diseño de una ley de control que minimice cierto funcional, es decir, la resolución del problema de control óptimo descentralizado. En [24] se presenta una revisión de la literatura que abarca la asignación de polos y plantea algunas de las dificultades clave que pueden encontrarse al momento de resolver el problema de optimización.

Tanto la asignación de polos, como el control óptimo descentralizado se enfocan al diseño de un control que satisfaga la restricción de información establecida en (4.2) y (4.3). Esto resuelve las dificultades 1 y 2 de la página 49, pero no las 3 y 4; es decir, no necesariamente se reduce la complejidad en el análisis y el diseño del sistema, ni se garantiza la robustez en presencia de perturbaciones estructurales. Para resolver las últimas dos dificultades, se requiere plantear el problema desde el punto de vista del control robusto. Es en este contexto en donde se sitúa una de las contribuciones de este trabajo.

La Estabilización de Sistemas de Control Descentralizado

En lo que sigue, se presenta brevemente el resultado obtenido en [29], concerniente a la posibilidad de estabilizar un sistema por medio de un control descentralizado. En [29] se describe al sistema como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{\nu} B_i u_i(t) \quad (4.4a)$$

$$y_i(t) = C_i x(t). \quad (4.4b)$$

4. APLICACIÓN AL CONTROL DESCENTRALIZADO

Dicho sistema es más general que el representado por (4.1), ya que el dominio de las matrices C_i no necesariamente tiene que coincidir con el co-dominio de las matrices B_i . Cabe mencionar que, aunque el sistema (4.1) es un poco más restrictivo, representa una gran cantidad de problemas físicos.

Dado que el sistema es lineal e invariante en el tiempo, la primera tentativa es proponer un controlador lineal e invariante en el tiempo

$$\dot{z}_i(t) = S_i z_i + R_i y_i(t) \quad (4.5a)$$

$$u_i(t) = Q_i z_i + K_i y_i(t) + v_i(t), \quad (4.5b)$$

donde $z_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ es el estado del i -ésimo controlador, $v_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ es la i -ésima entrada externa local, y S_i , R_i , Q_i y K_i son matrices reales, constantes y de tamaño apropiado. La representación (4.5) es bastante amplia, incluye cualquier controlador lineal e invariante en el tiempo, estático o dinámico. La ecuación (4.5) puede escribirse de manera más compacta como

$$\dot{z}(t) = Sz(t) + Ry(t) \quad (4.6a)$$

$$u(t) = Qz(t) + Ky(t) + v(t) \quad (4.6b)$$

donde

$$\begin{aligned} S &\triangleq \text{diag}(S_1, \dots, S_\nu), & R &\triangleq \text{diag}(R_1, \dots, R_\nu) \\ Q &\triangleq \text{diag}(Q_1, \dots, Q_\nu), & K &\triangleq \text{diag}(K_1, \dots, K_\nu) \\ z(t) &\triangleq \text{col}(z_1, \dots, z_\nu), & y(t) &\triangleq \text{col}(y_1, \dots, y_\nu) \\ u(t) &\triangleq \text{col}(u_1, \dots, u_\nu), & v(t) &\triangleq \text{col}(v_1, \dots, v_\nu). \end{aligned}$$

Cuando la ley de control (4.6) se aplica al sistema (4.4), resulta el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BKC & BQ \\ RC & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \quad (4.7)$$

donde

$$B = [B_1 \quad \dots \quad B_\nu] \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_\nu \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Lo que se busca entonces son condiciones para que un controlador de la forma (4.5) estabilice al sistema (4.4).

Definición 2 (Polinomio fijo) *Considérese la terna $\{C, A, B\} \in \mathbb{R}^{p \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ y los dos conjuntos de enteros m_1, \dots, m_ν y p_1, \dots, p_ν , con $m = \sum_{i=1}^\nu m_i$ y $p = \sum_{i=1}^\nu p_i$ que definen al sistema (4.4). Sea \mathcal{K} el conjunto de todas las matrices de bloques diagonales:*

$$\mathcal{K} = \{K | K = \text{diag}(K_1, \dots, K_\nu), \quad K_i \in \mathbb{R}^{m_i \times p_i}\} \quad (4.9)$$

El máximo común divisor del conjunto de polinomios característicos de $(A + BKC)$, para toda $K \in \mathcal{K}$, se denomina el polinomio fijo de la terna $\{C, A, B\}$ con respecto a \mathcal{K} , denotado por $\psi(\lambda; C, A, B, \mathcal{K})$, es decir,

$$\psi(\lambda; C, A, B, \mathcal{K}) = \text{mcd}_{K \in \mathcal{K}} \{\det(\lambda I - A - BKC)\}$$

Si se simplifica la ley de control (4.5) a una de la forma

$$u(t) = Ky(t) \quad (4.10)$$

donde K tiene la forma descrita en (4.9), la matriz del sistema en lazo cerrado es $A + BKC$. Como el polinomio fijo es común para todas las $K \in \mathcal{K}$, no importa que K se utilice, las raíces de dicho polinomio siempre estarán presentes. Esta idea se formaliza con la siguiente definición.

Definición 3 (Modos fijos) *Para una terna $\{C, A, B\} \in \mathbb{R}^{p \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ y un conjunto \mathcal{K} de matrices de bloques diagonales definidas en la ecuación (4.9), el conjunto de modos fijos de $\{C, A, B\}$ con respecto a \mathcal{K} se define de la siguiente forma:*

$$\Lambda(C, A, B, \mathcal{K}) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \sigma[A + BKC]$$

donde $\sigma[A + BKC]$ es el conjunto de valores característicos de $(A + BKC)$. De manera equivalente, $\Lambda(C, A, B, \mathcal{K})$ puede definirse de la siguiente forma:

$$\Lambda(C, A, B, \mathcal{K}) = \{\lambda | \lambda \in \mathbb{C}, \quad \psi(\lambda; C, A, B, \mathcal{K}) = 0\}$$

Los modos fijos son entonces, aquellos que no pueden modificarse por medio de la ley de control (4.10).

Teorema 4 *Considérese el sistema $\{C, A, B\}$ descrito por (4.4), con B y C definidos en (4.8). Sea \mathcal{K} el conjunto de matrices de bloques diagonales definido en (4.9). Una condición necesaria y suficiente para la existencia de un conjunto de leyes de control (4.6) tal que el sistema en lazo cerrado (4.7) sea asintóticamente estable es que*

$$\Lambda(C, A, B, \mathcal{K}) \subset \mathbb{C}^-$$

donde \mathbb{C}^- es el semi-plano izquierdo complejo abierto

La prueba de este teorema puede encontrarse en [29], así como el procedimiento para calcular los modos fijos.

Una manera de interpretar este teorema es: los modos fijos que no pueden eliminarse por medio de (4.10), no pueden eliminarse tampoco a través de (4.5).

En los sistemas de control descentralizado hay una característica interesante que va contra la intuición. Si un sistema de control centralizado, lineal e invariante en el tiempo no puede ser estabilizado por una ley de control lineal e invariante en el tiempo (estática o dinámica), entonces no puede estabilizarse por ninguna otra. En [1] se muestra que en el caso del control descentralizado hay algunos modos ‘fijos’ que sí pueden eliminarse si se utiliza una ley de control lineal pero variante en el tiempo (periódica).

Si existen modos fijos que no pueden eliminarse por medio de una ley de control invariante en el tiempo pero sí pueden eliminarse por medio de una variante en el tiempo, podríamos preguntarnos: ¿existirán modos fijos que no puedan eliminarse por medio de un control periódico pero sí por medio de otra ley, digamos no-lineal? En [12] se plantea esta pregunta; y la respuesta es “no”, es decir, si un sistema descentralizado no puede estabilizarse con una ley periódica, entonces no puede estabilizarse con ninguna otra, ya sea lineal o no-lineal, variante o invariante en el tiempo.

Control óptimo

Para resolver el problema de control descentralizado óptimo se han realizado varias propuestas. En [13], por ejemplo, se asume primero que no hay interconexiones entre los subsistemas, esta suposición garantiza que el control óptimo es diagonal. Después se calcula el error debido a la interconexión de los subsistemas.

En [15] se caracteriza, a partir de la forma de las matrices de interconexión A_{ij} , una clase de sistemas (4.1) para los cuales el índice de desempeño

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad x \triangleq \text{col}(x_1, \dots, x_\nu)$$

puede minimizarse usando una ley de control diagonal

$$u = Kx, \quad K = \text{diag}(K_1, \dots, K_\nu).$$

En [14] dicha clase se define en términos de modos fijos. Como ejemplo de aplicación tenemos [20], en donde se aplica un control descentralizado óptimo para la estabilización de un edificio. En [25] se aplica el principio máximo de Pontryagin y se expresan las restricciones de información como ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial u_i(x_i, t)}{\partial x^{\bar{i}}} = 0,$$

donde $x^{\bar{i}}$ es el estado completo del sistema, pero excluyendo x_i

$$x^{\bar{i}} = \text{col}(x_1, \dots, x_\nu, \setminus x_i).$$

Control robusto

Desde la perspectiva del control robusto, el término de interconexión

$$\sum_{i=1}^{\nu} A_{ij} x_j$$

en (4.1a) puede verse como una perturbación $\phi_i(x)$, es decir

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + \phi_i(x)$$

$$\phi_i(x) = \sum_{i=1}^{\nu} A_{ij} x_j = A^i x, \quad A^i = [A_{i1} \quad \dots \quad A_{i\nu}]. \quad (4.11)$$

Con esta consideración en mente, el problema de estabilizar el sistema (4.1) puede plantearse como el problema de encontrar un conjunto de leyes de control u_i , para los subsistemas nominales

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u_i(y_i, t) \\ y_i(t) &= C_i x_i(t), \end{aligned}$$

tal que las perturbaciones $\phi_i(x)$ no afecten la estabilidad de los subsistemas.

Como se vio en los capítulos anteriores, el control por modos deslizantes es una técnica robusta, capaz de eliminar las perturbaciones de tipo acoplado. En [23, 21], por ejemplo, se utilizan los modos deslizantes para eliminar el efecto de las interconexiones; en [10, 5] se combinan los modos deslizantes con técnicas de control adaptable para llevar a cabo el mismo propósito. Hay dos problemas fundamentales en las referencias que acaban de mencionarse; el primero es que se asume que las interconexiones satisfacen la condición de acoplamiento, lo cual resulta muy restrictivo; el segundo es que se asume que se dispone de todo el estado ($y_i = x_i$). En [31] sí se consideran interconexiones de tipo desacoplado y se considera también la retro-alimentación de la salida ($y_i = C_i x_i$); la desventaja es que se asume de antemano que la componente acoplada del estado puede estabilizarse por medio de una retro-alimentación estática de la salida.

4.4. Contribución

Con las técnicas desarrolladas en los capítulos anteriores, es relativamente fácil establecer condiciones de suficiencia para la resolución del problema de control descentralizado. Con esas técnicas podemos eliminar la parte acoplada de la interconexión; podemos tratar la parte no acoplada y en algunos casos estimar el estado cuando no es posible medirlo en su totalidad. Otra ventaja es que contamos con una función candidata de Lyapunov para cada subsistema.

Para garantizar la estabilidad del sistema interconectado, podemos definir una nueva función candidata de Lyapunov. Como en [17], planteamos dicha función como la suma de las funciones de cada subsistema

$$V = \sum_{i=1}^{\nu} V_i(x_i). \quad (4.12)$$

El sistema interconectado es asintóticamente estable si

$$\dot{V} < 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Retro de estado con condición de acoplamiento

Cuando los términos de interconexión (4.11) cumplen con la condición de acoplamiento

$$\phi_i(x) = B_i \delta_i(x)$$

y se puede medir todo el estado

$$C_i = I,$$

el diseño de una ley descentralizada es simple, sólo se requiere la controlabilidad de $\{A_i, B_i\}$. Como en el capítulo 3, usamos un control por modos deslizantes integrales. Los controles discontinuos u_{i1} eliminan completamente el efecto de las interconexiones $B_i \delta_i(x)$. Los controles continuos u_{i0} pueden diseñarse de tal forma que los subsistemas sean asintóticamente estables; usando un control LQR por ejemplo. Si los estados x_i convergen asintóticamente al punto de equilibrio, entonces el estado completo $x = \text{col}(x_1, \dots, x_\nu)$ también convergerá asintóticamente al punto de equilibrio.

Ejemplo

Como sistema nominal, consideremos un péndulo simple, como el que se presenta en la figura 4.1. Su dinámica está dada por

$$ml^2 \ddot{\theta} + c_f \dot{\theta} - mgl \sin \theta = \tau, \quad (4.13)$$

donde m es la masa, l la longitud de la barra, θ el ángulo con respecto a la vertical, g la aceleración gravitacional, c_f el coeficiente de fricción rotacional y τ la torca aplicada en la articulación del péndulo. Supongamos que el sistema se controla por medio de un motor de CD, como el de la figura 4.2. La torca es proporcional a la corriente que circula por el motor

$$\tau = k_\tau i_a,$$

y la corriente está dada por

$$\begin{aligned} i_a &= \frac{v - v_a}{R_s} = \frac{v - k_v \omega - r_a i_a}{R_s}, & \omega &= \dot{\theta} \\ (R_s + r_a) i_a &= v - k_v \omega \\ i_a &= \frac{v - k_v \omega}{R_s + r_a}, \end{aligned}$$

4. APLICACIÓN AL CONTROL DESCENTRALIZADO

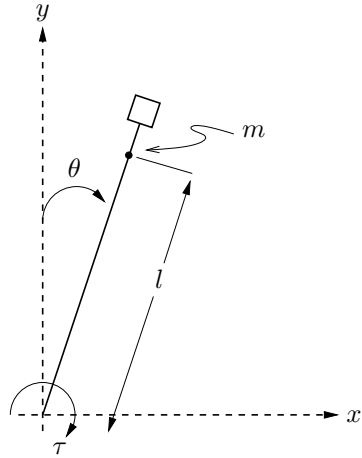


Figura 4.1: Péndulo Simple.

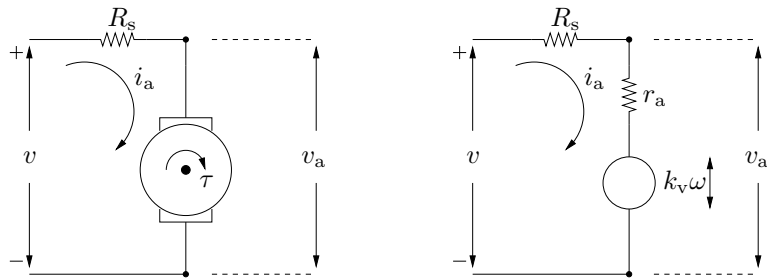


Figura 4.2: Motor de CD (izquierda) y su circuito equivalente (derecha) simplificado.

por lo que la relación entre la torca y es voltaje es

$$\tau = -\frac{k_\tau k_v}{R_s + r_a} \omega + \frac{k_\tau}{R_s + r_a} v. \quad (4.14)$$

Combinando (4.13) y (4.14) obtenemos

$$ml^2 \ddot{\theta} = mgl \sin \theta - \left(c_f + \frac{k_\tau k_v}{R_s + r_a} \right) \dot{\theta} + \frac{k_\tau}{R_s + r_a} v,$$

que linealizada alrededor del origen puede escribirse como

$$J \ddot{\theta} = a_0 \theta - a_1 \dot{\theta} + b_1 v + \mathcal{O}_2(\theta), \quad (4.15)$$

con

$$a_0 = mgl, \quad a_1 = c_f + \frac{k_\tau k_v}{R_s + r_a}, \quad b_1 = \frac{k_\tau}{R_s + r_a}, \quad J = ml^2;$$

o en forma canónica como

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a_0}{J} & -\frac{a_1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_1}{J} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{O}_2(\theta) \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Consideremos ahora dos péndulos idénticos, interconectados por medio de un diferencial y un tercer péndulo, como el que se muestra en la figura 4.3. El ángulo del tercer péndulo está dado por

$$\theta_3 = k_a(\theta_1 - \theta_2) + \theta_0, \quad \theta_0 = \text{const.}$$

Usando el método del Lagrangiano llegamos al siguiente par de ecuaciones de movimiento

$$(J + J_a) \ddot{\theta}_1 - J_a \ddot{\theta}_2 - a_0 \sin \theta_1 + m_a g l_a k_a \sin \theta_3 = \tau_1 - c_f \dot{\theta}_1 \quad (4.17)$$

$$(J + J_a) \ddot{\theta}_2 - J_a \ddot{\theta}_1 - a_0 \sin \theta_2 - m_a g l_a k_a \sin \theta_3 = \tau_2 - c_f \dot{\theta}_2, \quad (4.18)$$

con $J_a = m_a l_a^2 k_a^2$.

Escribiendo las ecuaciones (4.17) y (4.18) en forma matricial y utilizando la relación (4.14) tenemos que

$$\begin{bmatrix} J + J_a & -J_a \\ -J_a & J + J_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \theta_1 - a_1 \dot{\theta}_1 \\ a_0 \theta_2 - a_1 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 v_1 \\ b_1 v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_a \theta_1 + a_a \theta_2 \\ a_a \theta_1 - a_a \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{O}_2(\theta_1, \theta_3) \\ \mathcal{O}_2(\theta_1, \theta_3) \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

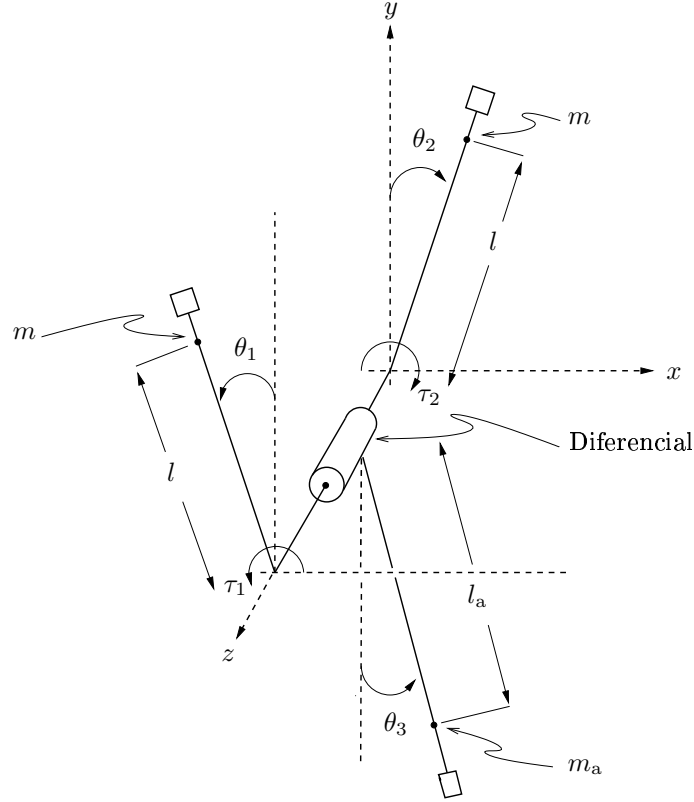


Figura 4.3: Dos péndulos interconectados.

con $a_a = m_a g l_a k_a^2$.

Después de despejar $\ddot{\theta}_1$ se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\omega}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a_0}{J} & -\frac{a_1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_1}{J} \end{bmatrix} v_1 + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ J_a a_0 - J a_a & -J_a a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \\ &+ \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -J_a a_0 + J a_a & J_a a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ J_a b_1 (v_1 + v_2) + \mathcal{O}_2(\theta_1, \theta_3) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{J(J + 2J_a)}.$$

Y después de despejar $\ddot{\theta}_2$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a_0}{J} & -\frac{a_1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_1}{J} \end{bmatrix} v_2 + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -J_a a_0 + J a_a & J_a a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \\ + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ J_a a_0 - J a_a & -J_a a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ J_a b_1 (v_1 + v_2) + \mathcal{O}_2(\theta_1, \theta_3) \end{bmatrix}.$$

Supongamos que se tienen los siguientes parámetros:

Parámetro	Valor	
m	0.05	[kg]
l	0.30	[m]
g	9.81	[m/s ²]
J	0.0045	[kg · m ²]
a_0	0.14715	[N · m]
m_a	0.10	[kg]
l_a	0.25	[m]
k_a	0.8	
J_a	0.0040	[kg · m ²]
a_a	0.15696	[N · m]
α	17,778	[1/kg ² · m ⁴]
c_f	0.5	[N · m · s]
k_v	1.2	[V · s]
k_τ	0.45	[N · m/A]
R_s	100	[Ω]
r_a	2	[Ω]
a_1	0.50529	[N · m · s]
b_1	0.00441	[N · m/V]

Entonces el primer subsistema puede representarse como

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\omega}_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 32.7 & -112.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix}}_{\text{Subsistema nominal}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.98 \end{bmatrix} v_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2.1 & -36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix}}_{A_{11}} + \\ + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2.1 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix}}_{A_{12}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.31(v_1 + v_2) + \mathcal{O}_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \end{bmatrix},$$

y el segundo como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 32.7 & -112.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix}}_{\text{Subsistema nominal}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.98 \end{bmatrix} v_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2.1 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix}}_{A_{21}} + \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2.1 & -36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix}}_{A_{22}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.31(v_1 + v_2) + \mathcal{O}_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para controlar los subsistemas nominales utilizamos un control LQR. Con

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y \quad R = 1,$$

tenemos

$$v_i = \begin{bmatrix} -66.9 & -0.60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \omega_i \end{bmatrix}.$$

En la figura 4.4a, se muestra la respuesta del sistema cuando los péndulos se encuentran desacoplados y se tienen las siguientes condiciones iniciales: $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0.8$ y $\omega_1 = \omega_2 = 0$. En la figura 4.4b se puede ver la respuesta del sistema cuando los péndulos se interconectan a través del tercer péndulo. Para la simulación se utilizó $\theta_0 = 1.5$. Se observa que el punto de equilibrio ya no es el cero. En la figura 4.4c, se puede observar la respuesta cuando se utilizan modos deslizantes integrales. El control utilizado fue

$$\begin{aligned} v_i &= \begin{bmatrix} -66.9 & -0.60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \omega_i \end{bmatrix} - 35 \text{sign}(s_i) \\ s_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1.02 \end{bmatrix} \left[x_i(t) - x_i(0) - \int_0^\infty \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -32.8 & -112.9 \end{bmatrix} x(\tau) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Retro de estado sin condición de acoplamiento

Cuando las interconexiones contienen componentes no acopladas

$$\phi_i(x) = B_i \delta_i(x) + B_i^\perp \eta_i(x),$$

y se dispone de todo el estado

$$C_i = I,$$

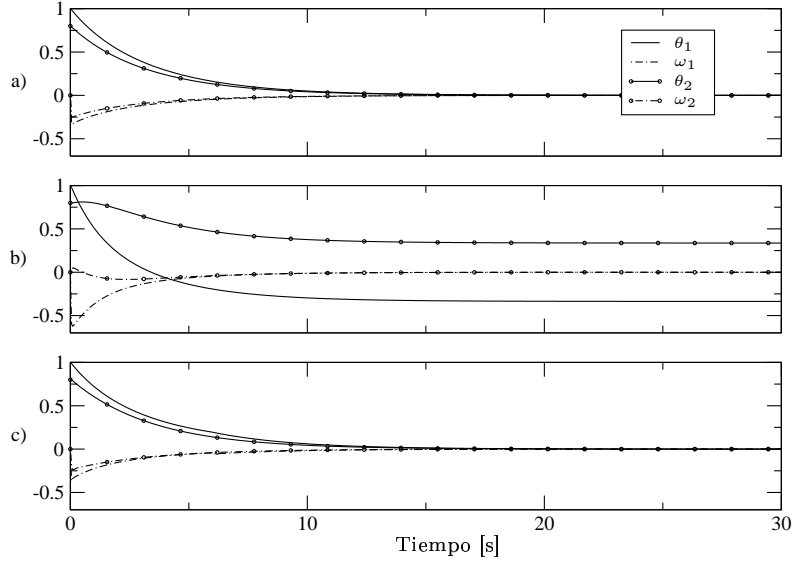


Figura 4.4: a) Péndulos desconectados con control lineal. b) Péndulos interconectados con control lineal. c) Péndulos interconectados con control por modos deslizantes integrales.

entonces combinamos los modos deslizantes integrales con \mathcal{H}_∞ . Los controles u_{i1} eliminan las componentes acopladas $B_i\delta_i(x)$ y la desacopladas $B_i^\perp\eta_i(x)$ se tratan con los controles continuos u_{i0} .

La dinámica de los subsistemas en las superficies deslizantes $s_i(x_i) = 0$ está dada por –ver (3.7)–

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_{i0} + B_i^\perp B_i^{\perp+} A^i x,$$

que en notación \mathcal{H}_∞ pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + B_{i1} w + B_{i2} u_{i0}, & B_{i1} &= B_i^\perp B_i^{\perp+} A^i, & w &= x \\ z_i &= C_{i1} x_i + D_{i12} u_{i0} \\ y_i &= x_i \end{aligned}$$

Si se satisfacen las condiciones del teorema 1 para toda $i = 1, \dots, \nu$, entonces se satisfacen las siguientes relaciones

$$V_i(x_i) = x_i^T X_{i\infty} x_i, \quad \dot{V}_i \leq -\|C_{i2} x_i\|^2 - \|u_{i0}\|^2 + \gamma_i^2 \|x\|^2.$$

4. APLICACIÓN AL CONTROL DESCENTRALIZADO

Haciendo $C_{i1} = I$ podemos ver que la función de Lyapunov (4.12) cumple con

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\sum_{i=1}^{\nu} (\|x_i\|^2 + \|u_{i0}\|^2 - \gamma_i^2 \|x\|^2) \\ &= -\|x\|^2 - \|u_0\|^2 + \|x\|^2 \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i^2, \quad u_0 \triangleq \text{col}(u_{10}, \dots, u_{\nu 0}) \\ &= -\|x\|^2(1 - \|\gamma\|^2) - \|u_0\|^2, \quad \gamma \triangleq \text{col}(\gamma_1, \dots, \gamma_{\nu}).\end{aligned}$$

Es fácil ver que $\dot{V} < 0 \quad \forall x \neq 0$ si

$$\boxed{\|\gamma\| < 1.}$$

Ejemplo

Considérense dos sistemas idénticos e interconectados

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \\ -11 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u_i + \\ &+ \begin{bmatrix} 0.05 & 0.11 & -0.02 \\ 1.65 & -1.19 & 7.98 \\ 2.45 & -1.84 & 11.98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{j1} \\ x_{j2} \\ x_{j3} \end{bmatrix}, \quad (4.20)\end{aligned}$$

$$j \neq i, \quad i, j = 1, 2.$$

El sistema en la superficie deslizante está dado por

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \\ -11 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u_{i0} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0.050 & 0.110 & -0.020 \\ 0.012 & 0.025 & -0.005 \\ -0.008 & -0.017 & 0.003 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{j1} \\ x_{j2} \\ x_{j3} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Las condiciones del teorema 1 se satisfacen con

$$X_{i\infty} = \begin{bmatrix} 12.29 & 3.95 & 0.51 \\ 3.95 & 1.61 & 0.04 \\ 0.51 & 0.04 & 0.49 \end{bmatrix}, \quad \gamma_i = 0.15$$

Como $\|\gamma\|^2 = 0.045$, la condición para la estabilidad del sistema interconectado se satisface. Los controles continuos están dados por

$$u_{i0} = \underbrace{[-9.42 \quad -3.34 \quad -1.56]}_{F_{i\infty} = -B_i^T X_{i\infty}} x_i$$

y las superficies deslizantes por

$$s_i = \underbrace{[0 \quad 0.15 \quad 0.23]}_{B_i^+} \left[x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t (A_i + B_i F_i) x(\tau) d\tau \right].$$

Para la respuesta del sistema que se ilustra en la figura 4.5 se utilizó el control discontinuo

$$u_{i1} = -2.5 \frac{s_i}{|s_i| + 0.001}$$

y el conjunto de condiciones iniciales $x_{i1}(0) = 0.1$, $x_{i2}(0) = 0.5$, $x_{i3}(0) = 2$. Con la figura puede verificarse la estabilidad del sistema interconectado.

Retro de Salida sin Condición de Acoplamiento

Para el caso de retro-alimentación de salida definimos un conjunto de transformaciones no singulares

$$T_i = \begin{bmatrix} B_i^{\perp+} \\ (C_i B_i)^+ C_i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T_{iy} = \begin{bmatrix} (C_i B_i)^{\perp+} \\ (C_i B_i)^+ \end{bmatrix}$$

en el estado y en la salida respectivamente. Los subsistemas de orden reducido son –ver (3.10)–

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i1} &= A_{i11} v_{i1} + A_{i22} v_{i2} + B_i^{\perp+} A^i x \\ \bar{y}_{i1} &= (C_i B_i)^{\perp+} C_i B_i^{\perp} v_{i1}, \end{aligned}$$

que en notación \mathcal{H}_∞ pueden escribirse como

$$\dot{v}_{i1} = A_{i11} v_{i1} + B_{i1} w + B_{i2} v_{i2},$$

con $B_{i1} = B_i^{\perp+} A^i$, $B_{i2} = A_{i12}$ y $w = x$.

$$\begin{aligned} z_i &= C_{i1} v_{i1} + D_{i12} v_{i2} \\ \bar{y}_{i1} &= C_{i2} v_{i1}, \quad C_{i2} = (C_i B_i)^{\perp+} C_i B_i^{\perp} v_{i1}. \end{aligned}$$

4. APLICACIÓN AL CONTROL DESCENTRALIZADO

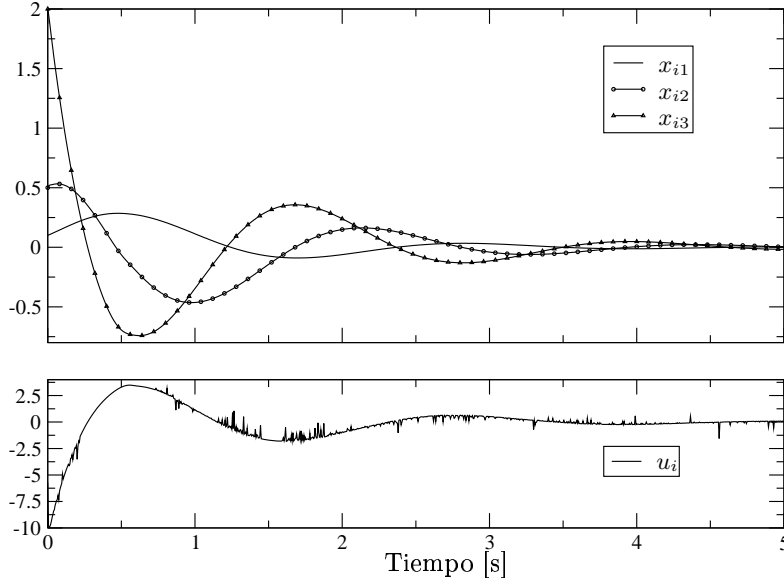


Figura 4.5: Respuesta de uno de los subsistemas usando modos deslizando integrales y \mathcal{H}_∞

Si se satisfacen las condiciones del teorema 1 para toda $i = 1, \dots, \nu$, entonces se satisfacen las siguientes relaciones

$$V_i(v_i) = v_{i1}^T X_{i\infty} v_{i1}, \quad \dot{V}_i \leq -\|C_{i2} v_{i1}\|^2 - \|v_{i2}\|^2 + \gamma_i^2 \|x\|^2.$$

Haciendo $C_{i1} = I$ podemos ver que la función de Lyapunov (4.12) cumple con

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\sum_{i=1}^{\nu} (\|v_{i1}\|^2 + \|v_{i2}\|^2 - \gamma_i^2 \|x\|^2) \\ &= -\|T_i x_i\|^2 + \|x\|^2 \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i^2 \\ &= -\|Tx\|^2 + \|x\|^2 \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i^2, \quad T \triangleq \text{diag}(T_1, \dots, T_\nu) \\ &\leq -\|x\|^2 (\lambda_m(T^T T) - \|\gamma\|^2), \end{aligned}$$

donde $\lambda_m(T^T T)$ es el mínimo eigen-valor de $T^T T$. Es fácil ver que $\dot{V} < 0 \quad \forall x \neq 0$ si

$$\|\gamma\|^2 < \lambda_m(T^T T).$$

Ejemplo

Considérense otra vez los sistemas (4.20); supongamos que sólo están disponibles las salidas

$$y_i = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las transformaciones

$$v_i = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.83 & 0.55 \\ 0.41 & 0.32 & 0.12 \end{bmatrix}}_{T_i} x_i \quad \text{y} \quad \bar{y}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.79 & 0.61 \\ 0.05 & 0.07 \end{bmatrix}}_{T_{iy}} y_i$$

expresan los sistemas (4.20) como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{v}_{i1} \\ \dot{v}_{i2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.82 & 0.44 \\ 0.37 & -2.78 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -9.98 \end{bmatrix} v_{i3} + \\ &+ \begin{bmatrix} -0.05 & -0.11 & 0.02 \\ -0.01 & -0.03 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{j1} \\ x_{j2} \\ x_{j3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.21a)$$

$$\bar{y}_1 = \begin{bmatrix} 2.72 & -0.32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{bmatrix} \quad (4.21b)$$

y

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i3} &= \begin{bmatrix} 2.64 & 2.14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{bmatrix} + 1.6v_{i3} + u + \\ &+ \begin{bmatrix} 0.84 & -0.56 & 3.98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{j1} \\ x_{j2} \\ x_{j3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.22a)$$

$$\bar{y}_2 = v_{i3}. \quad (4.22b)$$

Para los subsistemas de orden reducido (4.21), las condiciones del teorema 1 se satisfacen con

$$X_{i\infty} = \begin{bmatrix} 0.49 & -0.04 \\ -0.04 & 0.08 \end{bmatrix}, \quad Y_{i\infty} = \begin{bmatrix} 0.020 & 0.004 \\ 0.004 & 0.001 \end{bmatrix}, \quad \gamma_i = 0.158$$

4. APLICACIÓN AL CONTROL DESCENTRALIZADO

Como $\lambda_m(T^T T) = 0.063$ y $\|\gamma\|^2 = 0.050$, la condición para la estabilidad del sistema interconectado se satisface. Los estimadores se diseñan entonces como

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{v}}_{i1} \\ \dot{\hat{v}}_{i2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1.86 & -0.98 \\ -5.12 & -9.94 \end{bmatrix}}_{\hat{A}_{i\infty}} \begin{bmatrix} \hat{v}_{i1} \\ \hat{v}_{i2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -0.065 & 0.051 \\ -0.013 & 0.010 \end{bmatrix}}_{-Z_{i\infty} L_{i\infty} (C_i B_i)^{+}} y_i$$

y las superficies deslizantes como

$$s_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.553 & 0.717 \end{bmatrix}}_{-F_{i\infty}} \begin{bmatrix} \hat{v}_{i1} \\ \hat{v}_{i2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.054 & 0.069 \end{bmatrix}}_{(C_i B_i)^+} y_i.$$

Para la simulación de la figura (4.6), se utilizaron los controles

$$u_i = -7.5 \frac{s_i}{|s_i| + 0.005}$$

y el conjunto de condiciones iniciales $x_{i1}(0) = 0.1$, $x_{i2}(0) = 0.5$, $x_{i3}(0) = 2$. Se puede ver que el sistema interconectado es estable.

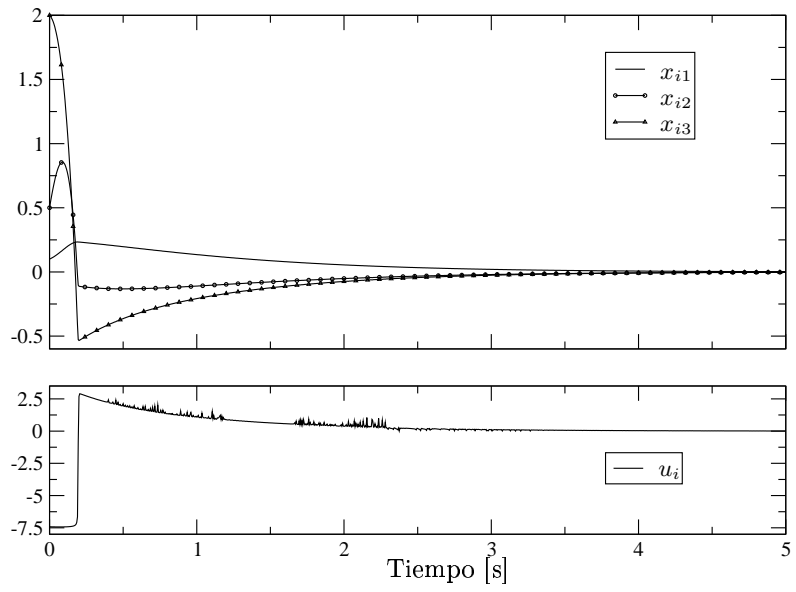


Figura 4.6: Respuesta de uno de los subsistemas usando modos deslizantes convencionales y \mathcal{H}_∞

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Resultados Generales

En el capítulo 2 se presentaron dos algoritmos de control basados en modos deslizantes: uno por modos deslizantes convencionales y otro por modos deslizantes integrales. Los modos deslizantes integrales, aunque no reducen el orden del sistema, garantizan la robustez desde el primer instante de tiempo y proporcionan un grado extra de libertad en el diseño de la superficie. Las proposiciones 1 y 2 proporcionan un criterio claro y conciso para aprovechar ese grado extra de libertad. Dicho criterio se basa en la minimización del efecto de las perturbaciones no acopladas –el cual ha sido ignorado por la mayor parte de la literatura sobre modos deslizantes. Este criterio tiene sentido cuando, debido a la presencia de perturbaciones que no se encuentran acopladas al control, se desea combinar los modos deslizantes integrales con alguna otra técnica robusta.

5.2. Modos Deslizantes y \mathcal{H}_∞

En el capítulo 3 se hizo una breve introducción al problema de control \mathcal{H}_∞ . Este problema, planteado y resuelto desde la perspectiva del espacio de estados, presenta una estructura tipo estimador-retro de estado (similar a la que se encuentra en un controlador LQG), la cual permite combinar los modos deslizantes con el control \mathcal{H}_∞ . Dicha combinación resulta útil, ya que los modos deslizantes eliminan las perturbaciones acopladas y el control \mathcal{H}_∞ acota el estado

5. CONCLUSIONES

en presencia de perturbaciones desacopladas. Otra ventaja es que, en algunos casos, es posible resolver el problema de retro-alimentación de salida mediante una transformación en las coordenadas del sistema. Una ventaja más, es la obtención de una función candidata de Lyapunov, lo cual es útil cuando el sistema de control forma parte de un sistema más complejo y se desea realizar un análisis de estabilidad. Los ejemplos presentados, junto con las simulaciones realizadas, muestran la efectividad de la metodología propuesta.

5.3. Aplicación al Control Descentralizado

Las funciones candidatas de Lyapunov, obtenidas mediante las técnicas de \mathcal{H}_∞ permiten establecer condiciones de suficiencia simples para la resolución del problema de control descentralizado. Si bien dichas condiciones son un poco conservadoras, el proceso de diseño se simplifica considerablemente y el control resultante es robusto en cuanto a perturbaciones estructurales.

Bibliografía

- [1] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, “Time-varying feedback laws for decentralized control,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 26, pp. 1133–1139, Oct. 1981.
- [2] ———, *Optimal Control, Linear Quadratic Methods*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1990.
- [3] S. K. Bag, S. K. Spurgeon, and C. Edwards, “Output feedback sliding mode design for linear uncertain systems,” *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 144, pp. 209–216, May 1997.
- [4] H. H. Choi, “An LMI-based switching surface design method for a class of mismatched uncertain systems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 48, pp. 1634–1638, Sept. 2003.
- [5] C. Chou and C. Cheng, “A decentralized model reference adaptive controller for large-scale time-varying delay systems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 48, pp. 1213–1217, July 2003.
- [6] J. P. Corfmat and A. S. Morse, “Decentralized control of linear multivariable systems,” *Automatica*, vol. 12, pp. 479–495, 1976.
- [7] E. J. Davison, “On pole assignment in linear systems with incomplete state feedback,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 15, pp. 348–351, June 1970.
- [8] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*. New York: Macmillan Publishing Company, 1992.
- [9] J. C. Doyle, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, “State-space solutions to \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, pp. 831–847, Aug. 1989.

- [10] G. Feng and Y. A. Jiang, "Variable structure based decentralised adaptive control," *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 142, pp. 439–443, Sept. 1995.
- [11] A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [12] Z. Gong and M. Aldeen, "Stabilization of decentralized control systems," *Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control*, vol. 7, pp. 1–16, 1997.
- [13] A. İftar and Ü. Özgüner, "Local LQG/LTR controller design for decentralized systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32, pp. 962–930, Oct. 1987.
- [14] —, "An optimal control approach to the decentralized robust servomechanism problem," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, pp. 1268–1271, Dec. 1989.
- [15] M. Ikeda, D. D. Šiljak, and K. Yasuda, "Optimality of decentralized control for large-scale systems," *Automatica*, vol. 12, pp. 309–316, 1983.
- [16] A. Isidori and A. Astolfi, "Disturbance attenuation and \mathcal{H}_∞ -control via measurement feedback in nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, pp. 1283–1293, Sept. 1992.
- [17] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [18] H. Kimura, "Pole assignment by gain output feedback," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 20, pp. 509–516, Aug. 1975.
- [19] D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1969.
- [20] J. P. Lynch and K. H. Law, "Decentralized control techniques for large-scale civil structural systems," in *Proc. of the 20th International Modal Analysis Conference*, Los Angeles, California, Feb. 2002.

-
- [21] G. P. Matthews and R. A. DeCarlo, "Decentralized tracking for a class of interconnected nonlinear systems using variable structure control," *Automatica*, vol. 24, pp. 187–193, 1988.
- [22] A. S. Poznyak, L. Fridman, and F. J. Bejerano, "Mini-max integral sliding mode control for multimodel linear uncertain systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 49, pp. 97–102, Jan. 2004.
- [23] S. Richter, S. Lefebvre, and R. A. DeCarlo, "Control of a class of nonlinear systems by decentralized control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 27, pp. 492–494, Apr. 1982.
- [24] N. R. Sandell, P. Varaiya, M. Athans, and M. G. Safonov, "Survey of decentralized control methods for large scale systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 23, pp. 108–126, Apr. 1978.
- [25] S. V. Savastuk and D. D. Šiljak, "Optimal decentralized control," in *Proc. American Control Conference*, Baltimore, Maryland, June 1994, pp. 3369–3373.
- [26] J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. New Jersey: Prentice Hall, 1990.
- [27] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi, *Sliding Modes in Electromechanical Systems*. London, U.K.: Taylor & Francis, 1999.
- [28] V. Utkin and J. Shi, "Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions," in *Proc. Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, Dec. 1996, pp. 4591–4596.
- [29] S. Wang and E. J. Davison, "On the stabilization of decentralized control systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 18, pp. 473–478, Oct. 1973.
- [30] J. Xu, Y. Pan, and T. Lee, "Analysis and design of integral sliding mode control based on Lyapunov's direct method," in *Proc. American Control Conference*, Denver, Colorado, June 2003, pp. 192–196.
- [31] X. Yan, C. Edwards, and S. K. Suprgeon, "Decentralised robust sliding mode control for a class of nonlinear interconnected systems by static output feedback," *Automatica*, vol. 40, pp. 613–620, 2004.