

A predictor tuning by root multiplicity-induced dominance for position control of a quadrotor [★]

Bryan Rojas-Ricca * Fernando Castaños * Sabine Mondié *

* *Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Gustavo A. Madero, C.P. 07360, Ciudad de México, México (e-mail: {brojas,fcastanos,smondie}.cinvestav.mx).*

Abstract: This article introduces an observer-predictor that estimates the position of a quadrotor with input delay. The predictor whose aim is to compensate the delay, is tuned using multiplicity-induced dominance of the roots of the linearized prediction error. The stability of the prediction error is analyzed using a Lyapunov-Krasovskii functional. Simulation results of the quadrotor in closed-loop with a control law feed with the predicted states are presented.

Keywords: Infinite-dimensional systems, Delay systems, Nonlinear predictive control, UAVs.

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas con retardos permiten representar fenómenos de transporte, propagación y tiempos de procesamiento mediante el uso de ecuaciones diferenciales en diferencias. En consecuencia, los sistemas con retardos se emplean en una amplia variedad de problemas de control de áreas diversas tales como redes de comunicación, sistemas anti-sísmicos (Vite, L., Gomez, M. A., Morales, J. y Mondié, S., 2020), robótica móvil, sistemas de teleoperación (Kawai, Y., Namerikawa, T. y Fujita, M., 2010; Hernández-Díez, J. E., Niculescu, S. I., Méndez-Barrios, C.F., González-Galván, E. J. y Hernández-Molinar, R., 2016) y vehículos aéreos no tripulados (*Unmanned Aerial Vehicles*, UAV por sus siglas en inglés) (Romero, H., Benosman, R. y Lozano, R., 2006; Kim, M., Lee, S. y Son, H., 2016).

En años recientes, los UAV han recibido especial atención debido a su amplia variedad de aplicaciones tales como entrega de paquetería, levantamientos topográficos o asistencia en misiones de búsqueda y rescate, solo por mencionar algunas. Estas aplicaciones suelen emplear sistemas de Geo-localización satelital (*Global Positioning Systems*, GPS por sus siglas en inglés) y/o métodos de visión por computadora para obtener información del estado o del entorno, los cuales inducen retardos considerablemente altos al obtener, transmitir y procesar información.

Una de las principales motivaciones para estudiar los sistemas con retardos es que la presencia de retardos puede causar inestabilidad en el lazo de control. Además,

los recientes avances de sensores inteligentes y sistemas de visión, suelen requerir un tiempo de procesamiento considerablemente alto, por lo que hay una creciente necesidad de herramientas que permitan analizar y controlar sistemas sin despreciar los retardos. En particular, cuando el retardo se puede asociar a la entrada del sistema, una forma de evitar la inestabilidad es incluyendo un observador-predictor al lazo cerrado para compensar el retardo (Francisco, R., Mazenc, F. y Mondié, S., 2007). Los predictores son reconstructores basados en observadores, cuya finalidad es obtener un estimado del estado a partir de la entrada y la salida del sistema. Dicha estimación del estado corresponde al estado del sistema sin retardo, lo que permite a un sistema en lazo cerrado recuperar la estabilidad aún en presencia del retardo.

El error de estimación de un predictor debe converger a cero conforme evoluciona el sistema para que la estimación sea adecuada, por lo que la velocidad de convergencia puede resultar crucial para el buen funcionamiento de un predictor. Al igual que los observadores, los predictores son globales si convergen a cero desde cualquier condición inicial, son exponenciales si la tasa de convergencia es exponencial y son sintonizables si su tasa de convergencia puede ser ajustada.

La reciente investigación en el análisis frecuencial de sistemas con retardos de Boussaada, I., Unal, H. U. y Niculescu, S.I. (2016) presenta una propiedad de los cuasipolinomios denominada dominancia inducida por multiplicidad (*Multiplicity-Induced-Dominance*, MID por sus siglas en inglés). Esta propiedad establece que la raíz de máxima multiplicidad posible coincide con la abscisa espectral del cuasipolinomio. En este artículo se muestra el diseño de un predictor, que es sintonizado por

* This work was supported by Project Conacyt A1-S-24796.

MID, asignando así su tasa de decaimiento exponencial. Además, se aplica al control de posición de un cuadrotor considerando el retardo producido por la lectura de un GPS.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: En la sección 2 se encuentra el modelo del cuadrotor y se identifican los subsistemas afectados por el retardo del GPS. En la sección 3 se presenta el método de sintonización del predictor, así como su análisis de estabilidad mediante una funcional de Lyapunov-Krasovskii. En la sección 4 se muestra la simulación del cuadrotor en lazo cerrado y por último en la sección 5 se encuentran las conclusiones.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El modelo matemático del cuadrotor se obtiene mediante el análisis de un cuerpo rígido en el espacio como se muestra en la fig. 1 y se emplea el formalismo de Euler-Lagrange para obtener la ecuación de movimiento (Lozano, 2010). Debido a que la dinámica de los rotores es más rápida que las de la posición y orientación del cuerpo rígido, se asume que la fuerza producida por cada motor es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad: $f_i = k_i \omega_i^2$, $i = 1, \dots, 4$. Se considera un marco de referencia inercial \mathcal{I} fijo en tierra, donde el vector posición (X, Y, Z) corresponde al centro de masa del cuadrotor. Además, se considera un marco de referencia no inercial \mathcal{B} ubicado en el centro de masa del cuadrotor. Las coordenadas generalizadas del cuadrotor son

$$q = (X, Y, Z, \psi, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^6,$$

donde $\xi := [X \ Y \ Z]^\top$ es la posición cartesiana del cuadrotor asociada a \mathcal{I} y $\eta := [\psi \ \theta \ \phi]^\top$ es la orientación en ángulos de Euler, con sus respectivas velocidades $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ y aceleraciones $\ddot{\xi}$, $\ddot{\eta}$. Se considera que el cuadrotor no es flexible, por lo que la matriz de inercia I es constante y está asociada a \mathcal{B} . Para obtener una expresión de la matriz de inercia I asociada a \mathcal{I} se tiene que

$$\mathcal{J} = W_\eta^\top I W_\eta,$$

donde

$$W_\eta = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & 1 \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, del formalismo de Euler-Lagrange y las consideraciones antes mencionadas, la ecuación de movimiento se expresa de la siguiente manera:

$$m\ddot{\xi} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} mg + \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} u, \quad (1)$$

$$\mathcal{J}\ddot{\eta} = -C(\eta, \dot{\eta}) + \tau$$

con

$$C(\eta, \dot{\eta}) = \dot{\mathcal{J}}\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^\top \mathcal{J} \dot{\eta}),$$

donde m es la masa, g es la gravedad: Las entradas de control virtual u y $\tau = [\tau_\psi \ \tau_\theta \ \tau_\phi]^\top$ están dadas por

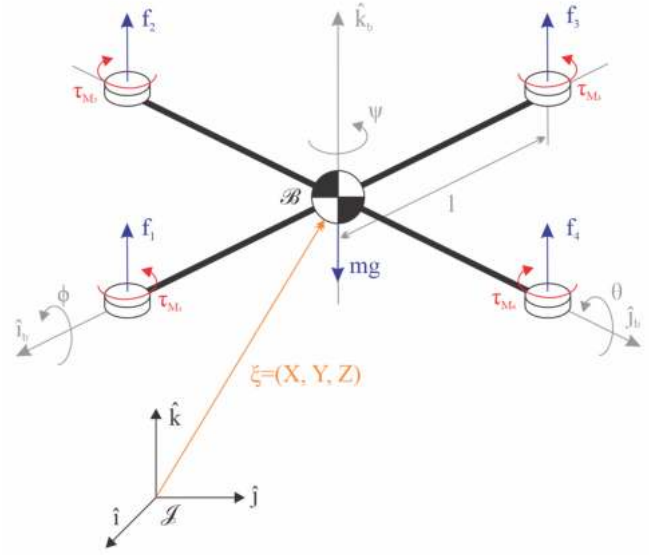


Fig. 1. Diagrama de cuerpo rígido del cuadrotor.

$$u = f_1 + f_2 + f_3 + f_4,$$

$$\tau_\psi = \tau_{M_1} + \tau_{M_2} + \tau_{M_3} + \tau_{M_4},$$

$$\tau_\theta = (f_2 - f_4)l,$$

$$\tau_\phi = (f_3 - f_1)l,$$

donde f_i , $i = 1, \dots, 4$ son las fuerzas producidas por cada rotor y τ_{M_i} , $i = 1, \dots, 4$ el par producido por la rotación de las hélices en cada motor, tal como se observa en la fig. 1.

Resulta de utilidad controlar la altitud y la orientación de manera independiente a la posición ya que para obtener la altitud se emplean sensores infrarrojos o ultrasónicos y para obtener la orientación se emplean unidades de medición inercial (Ordaz, J., Salazar, S., Mondié, S., Romero, H. y Lozano, R., 2012).

Se considera un control por linealización entrada-estado asociado a la orientación del cuadrotor, es decir, se escoge τ como

$$\tau = C(\eta, \dot{\eta}) + \mathcal{J}\tilde{\tau}, \quad (2)$$

de modo que la dinámica del sistema (1) sea descrita por

$$\ddot{\xi} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} u, \quad (3)$$

$$\ddot{\eta} = \tilde{\tau}$$

donde u , $\tilde{\tau}$ son entradas de control libres. Ahora, centrandose la atención en la dinámica de posición para las coordenadas (X, Y) y considerando que la posición del cuadrotor se obtiene mediante un GPS, se debe tener en cuenta que el tiempo que tarda el GPS en obtener y procesar la información induce un retardo considerable. Con la finalidad de considerar el retardo se plantean los siguientes subsistemas; para la coordenada X :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{m} \sin \theta u(t-h) \\ \bar{x} &= x_1\end{aligned}\quad (4)$$

donde $x_1 = X$, $x_2 = \dot{X}$ son el estado y \bar{x} es la salida. De la misma manera, para la coordenada Y :

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{m} \cos \theta \sin \phi u(t-h) \\ \bar{y} &= y_1\end{aligned}\quad (5)$$

donde $y_1 = Y$, $y_2 = \dot{Y}$ son el estado y \bar{y} es la salida. De aquí en adelante para el análisis, solo se va a considerar el espacio de estados (4) asociado a la coordenada X , y posteriormente se extenderá al espacio de estados (5) asociado a Y .

Note que definiendo $x = [x_1 \ x_2]^\top$, el sistema (4) puede expresarse con la forma canónica presentada por Gauthier, J. P. y Bornard, G. (1980):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Jx(t) + B\varphi_x(x(t), u(t-h)) \\ \bar{x}(t) &= Cx(t)\end{aligned}, \quad (6)$$

donde la matriz $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es un bloque de Jordan con eigenvalor cero, $B = [0 \ 1]^\top$, $C = [1 \ 0]$ y

$$\varphi_x(x(t), u(t-h)) = -\frac{1}{m} \sin \theta u(t-h)$$

es globalmente Lipschitz en x y uniformemente en u , es decir, existe una $\gamma_{\varphi_x} > 0$ tal que

$$\|\varphi_x(x, u) - \varphi_x(\hat{x}, u)\| \leq \gamma_{\varphi_x} \|x - \hat{x}\|, \quad (7)$$

para todo $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^2$ y todo $u \in \mathbb{R}$. Si se asume que existe un controlador u tal que para $h = 0$ el subsistema (6) es estable, el problema de predicción puede ser resuelto obteniendo un estimado \hat{x} tal que $\hat{x}(t-h)$ tienda a $x(t)$.

3. SINTONIZACIÓN DEL PREDICTOR

La forma canónica (6) permite plantear el predictor (Estrada-Sánchez, I., Velasco-Villa M. y Rodríguez-Cortés, H., 2017)

$$\dot{\hat{x}}(t) = J\hat{x}(t) + B\varphi_x(\hat{x}(t), u(t)) + L(\bar{x}(t) - C\hat{x}(t-h)), \quad (8)$$

donde $L = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]^\top$ es la ganancia del predictor, la cual es un parámetro libre por lo que el predictor es sintonizable. Considerando el error de predicción como $e(t) = x(t) - \hat{x}(t-h)$ se puede expresar la dinámica del error de la siguiente manera

$$\dot{e}(t) = Je(t) - LCe(t-h) + B\Phi_x(x(t), \hat{x}(t-h), u(t-h)), \quad (9)$$

con $\Phi_x(x, \hat{x}, u) = \varphi_x(x, u) - \varphi_x(\hat{x}, u)$. Se debe considerar que el estado del sistema (9) es infinito dimensional y se define como la función $e_t : \theta \mapsto e(t+\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$ (Kharitonov, 2013).

Por lo tanto, si se escoge L de tal manera que el sistema (9) tenga un punto de equilibrio estable en el origen, es decir, $e_t \rightarrow 0$ a medida que $t \rightarrow \infty$, entonces $\hat{x}(t)$ es

un estimado de $x(t+h)$ y $\hat{x}(t-h)$ puede emplearse en el controlador para compensar los estados retardados.

Primero, considerando $h = 0$ y definiendo el operador

$$\mathcal{L} : e \mapsto (J - LC)e,$$

se observa que \mathcal{L} tiene un equilibrio estable en el origen siempre que $(J - LC)$ sea Hurwitz, más aún, ya que el par (J, C) es observable, el espectro puede ser asignado arbitrariamente mediante la selección de L . Debido a que la función no lineal Φ_x cumple con (7), puede ser dominada por \mathcal{L} y la solución trivial de (9) puede mantener la estabilidad asintótica asignando su espectro en el semi-plano complejo izquierdo.

Ahora, para $h > 0$ se define el operador

$$\mathcal{D} : e_t \mapsto Je(t) - LCe(t-h), \quad (10)$$

note que a diferencia de \mathcal{L} , \mathcal{D} es de dimensión infinita y no puede ser asignado arbitrariamente mediante la ganancia L de dimensión n , sin embargo, con ayuda de una propiedad de los cuasipolinomios llamada dominancia inducida por multiplicidad (*Multiplicity-Induced Dominance*, MID por sus siglas en inglés), presentada por Boussaada, I., Unal, H. U. y Niculescu, S.I. (2016) se puede asignar la abscisa espectral de \mathcal{D} del lado izquierdo del eje imaginario. La propiedad MID implica que la raíz con multiplicidad máxima en un cuasipolinomio es al mismo tiempo la abscisa espectral. Note que la ecuación característica de (10) es el cuasipolinomio

$$D_L(s) = P(s) + Q_L(s)e^{-sh}, \quad (11)$$

donde

$$P(s) = s^n \quad \text{y} \quad Q_L(s) = [s^{n-1} \ s^{n-2} \ \dots \ s \ 1] \cdot L.$$

Se dice que una raíz s^* de $D_L(s)$ es *dominante* si

$$\Re(s^*) = \max \{ \Re(s) \mid D_L(s) = 0 \}. \quad (12)$$

Balogh, T., Boussaada, I., Insperger, T. y Niculescu, S. I. (2022) demuestran que la propiedad MID es necesaria y suficiente para que la raíz de máxima multiplicidad sea también dominante, esto para el caso en que todos los coeficientes del cuasipolinomio son libres y distintos de cero.

En el caso de $D_L(s)$ los coeficientes de $P(s)$ para los términos de grado menor a n son todos cero, por lo que la metodología presentada por Balogh, T., Boussaada, I., Insperger, T. y Niculescu, S. I. (2022) no se puede emplear. Sin embargo, en (Rojas-Ricca, 2021) se presenta una metodología para asegurar que en (11) la raíz de máxima multiplicidad admisible sea dominante.

A continuación se presentan los dos teoremas de (Rojas-Ricca, 2021) que permiten asignar una raíz dominante de máxima multiplicidad admisible. El primero identifica el conjunto de puntos sobre el plano complejo que admiten una raíz de máxima multiplicidad y el segundo identifica para cual de estos puntos, la raíz es al mismo tiempo dominante.

Definiendo el polinomio

$$q(r) := \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{n!}{j!} r^j, \quad (13)$$

y el conjunto

$$\mathcal{S} = \{s \in \mathbb{R} \mid q(sh) = 0\}, \quad (14)$$

se puede enunciar el siguiente teorema que establece las condiciones para que cada elemento del conjunto \mathcal{S} sea un punto del plano complejo que admite una raíz de multiplicidad $n + 1$.

Teorema 3.1. (Rojas-Ricca, 2021) Si σ es una raíz con multiplicidad $n + 1$ del cuasipolinomio $D_L(s)$ definido en (11), entonces $\sigma \in \mathcal{S}$. Además, para cualquier $\sigma \in \mathcal{S}$, se puede encontrar una ganancia $L = L(\sigma) \in \mathbb{R}^n$ tal que σ es una raíz con multiplicidad $n + 1$ de $D_L(s)$. Más aún, tal ganancia está dada por

$$L(\sigma) = \text{diag} \left(\frac{1}{h}, \frac{1}{h^2}, \dots, \frac{1}{h^n} \right) \bar{L}(\sigma h), \quad (15)$$

donde $\bar{L}(r) = [\bar{l}_1(r) \ \bar{l}_2(r) \ \dots \ \bar{l}_n(r)]^\top$ esta definida por

$$\bar{l}_k(r) = \sum_{j=n-k+1}^n \sum_{i=1}^j \left[(-1)^{n+j+k} \binom{n}{i-j} \cdot \binom{j-1}{n-k} \frac{1}{(i-1)!} r^{i-1} \right] r^k e^r, \quad (16)$$

para $k = 1, 2, \dots, n$.

Ahora, se identifica cuál elemento de \mathcal{S} definido en (14) produce una raíz múltiple dominante, para esto se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 3.2. (Rojas-Ricca, 2021) Sea

$$\sigma^* = \max \mathcal{S} \quad (17)$$

y definiendo

$$L^* = L(\sigma^*),$$

con $L(\sigma)$ dado por (15). Entonces, σ^* es una raíz dominante con multiplicidad $n + 1$ de $D_{L^*}(s)$.

Considerando el predictor definido en (8) y seleccionando la ganancia $L = L^*$ como se propone en el teorema 3.2, entonces el operador \mathcal{D} definido en (10) tiene un equilibrio estable en el origen.

3.1 Análisis de Lyapunov-Krasovskii

Ahora, se analiza bajo qué condiciones la estabilidad del operador \mathcal{D} implica la estabilidad del sistema (9). Para esto se considera la funcional de Lyapunov-Krasovskii

$$V(e_t, \dot{e}_t) = e^\top(t) P e(t) + \int_{t-h}^t e^\top(s) S e(s) ds + h \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{e}^\top(s) R \dot{e}(s) ds d\theta,$$

con $P > 0$, $R > 0$, $S > 0$. La derivada de $V(e_t, \dot{e}_t)$ a lo largo de las trayectorias de (9) cumple con la desigualdad (Fridman, 2014):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(e_t, \dot{e}_t) &\leq 2e^\top(t) P \dot{e}(t) + e^\top(t-h) S e(t-h) \\ &\quad + h^2 \dot{e}^\top(t) R \dot{e}(t) \\ &\quad - (e(t) - e(t-h))^\top R (e(t) - e(t-h)). \end{aligned} \quad (18)$$

Ahora, se suman dos términos nulos a (18). Primero, elevando al cuadrado (7) se tiene

$$- \|\Phi_x(t)\|^2 + \|\Phi_x(t)\|^2 \leq -\Phi_x^\top(t) \Phi_x(t) + e^\top(t) \gamma_{\varphi_x}^2 I_2 e(t), \quad (19)$$

donde el primer término nulo es el lado derecho. Por otro lado, definiendo el término descriptor nulo

$$0 = 2 [e^\top(t) P_2^\top + \dot{e}^\top(t) P_3^\top + \Phi_x^\top(t) B^\top P_4^\top] \cdot [-\dot{e}(t) + J e(t) - L^* C e(t-h) + B \Phi_x(t)], \quad (20)$$

con P_2 , P_3 y P_4 matrices arbitrarias de dimensiones apropiadas y sumando (19-20) a la desigualdad en (18) se tiene

$$\frac{d}{dt} V(e_t, \dot{e}_t) \leq \mathcal{E}^\top(t) M \mathcal{E}(t), \quad (21)$$

donde el vector $\mathcal{E}(t) := [e^\top(t) \ \dot{e}^\top(t) \ e^\top(t-h) \ \Phi_x^\top(t)]^\top$ y la matriz $M = M^\top$ está definida como

$$M = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & -P_2^\top L^* C + R & P_2^\top B + J^\top P_4 B \\ * & M_{2,2} & -P_3^\top L^* C & P_3^\top B - P_4 B \\ * & * & -(S + R) & -(L^* C)^\top P_4 B \\ * & * & * & M_{4,4} \end{bmatrix},$$

con

$$M_{1,1} = J^\top P_2 + P_2^\top J + S - R + \gamma_{\varphi_x}^2 I_2,$$

$$M_{1,2} = P - P_2^\top + J^\top P_3,$$

$$M_{2,2} = -P_3 - P_3^\top + h^2 R,$$

$$M_{4,4} = B^\top P_4^\top B + B^\top P_4 B - 1.$$

Si para una γ_{φ_x} dada, existen matrices $P > 0$, $R > 0$, $S > 0$, P_2 , P_3 y P_4 tales que $M < 0$, entonces el origen del sistema (9) se mantiene asintóticamente estable y por lo tanto $\hat{x}(t-h)$ es un estimado adecuado de $x(t)$.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para demostrar la utilidad del predictor se considera el sistema (1) con una ley de control propuesta a partir de la metodología de Castillo, P., Lozano, R. y Dzul, A. E. (2005), que permite estabilizar el vuelo del cuadrotor. Luego, como se mencionó anteriormente, se considera un retardo en la dinámica de las coordenadas (X, Y) producido por el GPS y se muestra que, para un retardo de 250 ms, el lazo cerrado se vuelve inestable. Entonces, al incluir el predictor propuesto se observa que la estabilidad del lazo cerrado se recupera a pesar de la presencia del retardo.

Considerando que los ángulos θ y ϕ se mantienen suficientemente pequeños, las entradas de control u , $\tilde{\tau}_\psi$, $\tilde{\tau}_\theta$ y $\tilde{\tau}_\phi$ se asignan como

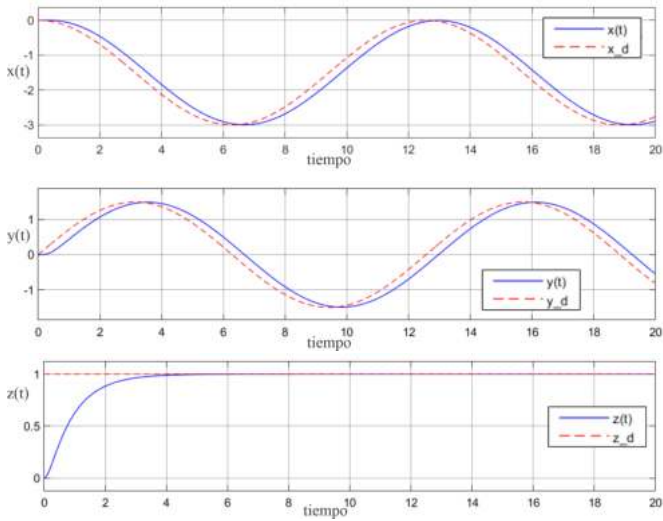


Fig. 2. Estados de (1) en lazo cerrado con el controlador (22-26), sin predictor, $h = 0$.

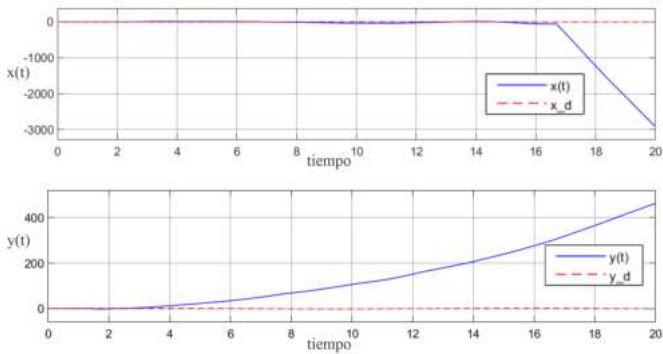


Fig. 3. Estados de (1) en lazo cerrado con el controlador (22-26), sin predictor, $h = 0.25$.

$$u(t) = \frac{1}{\cos(\theta)\cos(\phi)}(mg + v(t)), \quad (22)$$

$$v(t) = -k_{z_1}\dot{z} - k_{z_2}(z - z_d), \quad (23)$$

$$\tilde{\tau}_\psi = -k_{\psi_1}\dot{\psi} - k_{\psi_2}(\psi - \psi_d), \quad (24)$$

$$\tilde{\tau}_\theta = -k_{\theta_1}(x - x_d) - k_{\theta_2}\dot{x} - k_{\theta_3}\theta - k_{\theta_4}\dot{\theta}, \quad (25)$$

$$\tilde{\tau}_\phi = -k_{\phi_1}(y - y_d) - k_{\phi_2}\dot{y} - k_{\phi_3}\phi - k_{\phi_4}\dot{\phi}, \quad (26)$$

donde x_d , y_d , z_d y ψ_d son la referencia. Note que para valores entre $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ de θ y ϕ , (22) está bien definida. Para la simulación se consideran $x_d = 1.5\sin(t)$, $y_d = 1.5(1 - \cos(t))$, $z_d = 1$ y $\psi_d = 0$, de manera que el cuadrotor comienza en el origen, y se eleva a 1 m mientras traza círculos de 3 m de diámetro. La respuesta del sistema (1) en lazo cerrado con el controlador propuesto se muestra en la fig. 2. Al incluir el retardo de 250 ms el lazo cerrado pierde estabilidad, como se observa en la fig. 3.

Para compensar el retardo en (4) y en (5), se sintoniza el predictor, debido a que ambos subsistemas son de

dimensión 2, solo se requiere calcular la ganancia de predicción L una vez. Primero, el valor de σ^* se obtiene de la raíz más a la derecha de $q(r)$, que para $n = 2$, es

$$r_2 = -2 + \sqrt{2} = -0.5858,$$

por lo que

$$\sigma^* = \frac{-2 + \sqrt{2}}{h}.$$

Ahora, (16) implica que $\bar{l}_1(r_2) = 0.4612$ y $\bar{l}_2(r_2) = 0.0791$, por lo tanto, la ganancia del predictor es

$$L^* = \text{diag}\left(\frac{1}{h}, \frac{1}{h^2}\right)[0.4612 \ 0.0791]^\top.$$

El teorema 3.1 implica que al escoger $L = L^*$ en (8) se asigna una raíz real de multiplicidad $n + 1$, en el espectro de (11), ubicada sobre el eje real en σ^* . Más aún, por el teorema 3.2 se tiene que dicha raíz es también dominante, por lo que el origen de (10) es exponencialmente estable. Ahora, mediante el *toolbox* YALMIP de MATLAB, se resuelve la LMI (21) para $h = 0.25$ y maximizando γ_{φ_x} . Se obtiene que con

$$P = \begin{bmatrix} 2.4249 & -1.6647 \\ -1.6647 & 1.5919 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 6.7984 & -0.0001 \\ -0.0001 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.8339 & -0.4783 \\ -0.4783 & 0.2789 \end{bmatrix}$$

y

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1.6192 & -1.2353 \\ 0.02987 & 0.7350 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0.9509 & -0.5932 \\ -0.987 & 0.7669 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = -0.1415$$

la desigualdad (21) se cumple para toda $\gamma_{\varphi_x} \leq 0.5971$, y por lo tanto el origen del sistema (9) es asintóticamente estable. Se observa que γ_{φ_x} del subsistema (4) y γ_{φ_y} del subsistema (5) se mantienen menores a 0.5971 siempre que $\tan(\theta) - \theta \rightarrow 0$ y $\tan(\phi) - \phi \rightarrow 0$ respectivamente, es decir, mientras que las rotaciones del cuadrotor en θ y ϕ sean pequeñas, el predictor puede proporcionar un estado estimado adecuado para compensar el retardo.

Finalmente, se tiene que el predictor asociado al subsistema (4) es

$$\hat{\dot{x}}(t) = J\hat{x}(t) + B\varphi_x(\hat{x}(t), u(t)) + L^*(\hat{x}(t) - C\hat{x}(t-h)) \quad (27)$$

y debido a que la sintonización del predictor solo depende de la dimensión del sistema y del retardo, el predictor asociado al subsistema (5) es

$$\hat{\dot{y}}(t) = J\hat{y}(t) + B\varphi_y(\hat{y}(t), u(t)) + L^*(\hat{y}(t) - C\hat{y}(t-h)). \quad (28)$$

Incluyendo los predictores (27) y (28) se observa que el lazo cerrado del sistema (1) con el controlador (22-26), recupera su estabilidad como se observa en la fig. 4 y la trayectoria de vuelo obtenida se muestra en la fig. 5. Note que los resultados numéricos muestran convergencia de los estados x , y a los estados deseados x_d , y_d pero una prueba formal es parte del trabajo de investigación en curso.

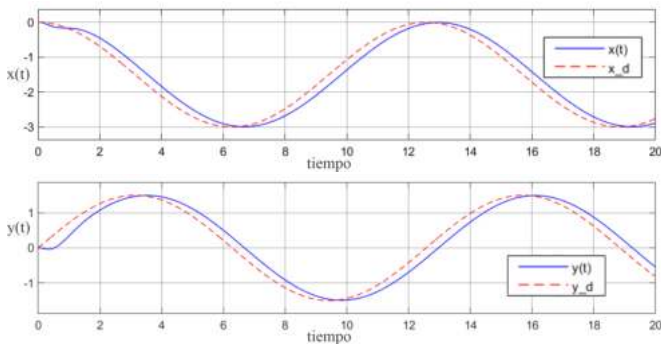


Fig. 4. Estados de (1) en lazo cerrado con el controlador (22-26) y el predictor (27-28), $h = 0.25$.

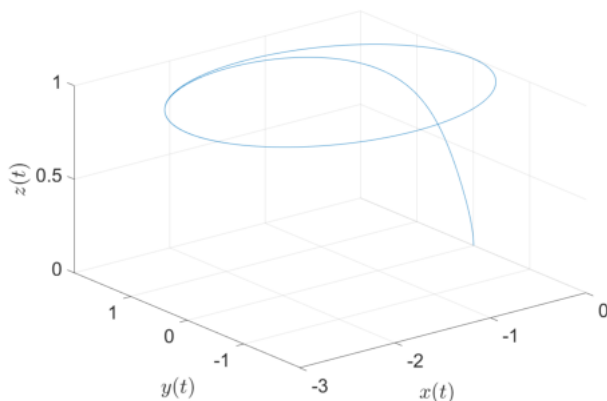


Fig. 5. Espacio de posiciones del sistema (1) en lazo cerrado con el controlador (22-26) y el predictor (27-28), $h = 0.25$.

5. CONCLUSIONES

Se observa que el predictor sintonizable es efectivo para recuperar la estabilidad cuando hay retardos suficientemente grandes, es decir, mayores al valor crítico del retardo. Esto implica que el predictor es capaz de obtener una estimación adecuada del estado y por lo tanto el error de predicción converge a cero. Una ventaja a destacar de este predictor, es que su sintonización depende solamente de la dimensión del sistema y del valor del retardo. Como se observa en el diseño, el error de predicción es un sistema con retardos lo que implica que también existe un retardo crítico para el error de predicción, por lo que, como trabajo futuro se puede analizar si existe alguna relación entre el retardo crítico del sistema y el del predictor, o por el contrario si el predictor es capaz de hacer una estimación adecuada para cualquier retardo crítico del sistema. Además, cabe mencionar que la robustez del esquema de predicción es tema de interés en investigaciones futuras.

REFERENCIAS

Balogh, T., Boussaada, I., Insperger, T. y Niculescu, S. I. (2022). Conditions for stabilizability of time-delay

- systems with real-rooted plant. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 32(6), 3206–3224.
- Boussaada, I., Unal, H. U. y Niculescu, S.I. (2016). Multiplicity and stable varieties of time-delay systems : A missing link. In *22nd International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*.
- Castillo, P., Lozano, R. y Dzul, A. E. (2005). *Modelling and Control of Mini-Flying Machines*. Springer London.
- Estrada-Sánchez, I., Velasco-Villa M. y Rodríguez-Cortés, H. (2017). Prediction-based control for nonlinear systems with input delay. *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2017, Article ID 7415418.
- Francisco, R., Mazenc, F. y Mondié, S. (2007). *Global Asymptotic Stabilization of a PVTOL Aircraft Model with Delay in the Input*, 343–356. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Fridman, E. (2014). *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*. Springer.
- Gauthier, J. P. y Bornard, G. (1980). Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. In *1980 19th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*, 910–915.
- Hernández-Díez, J. E., Niculescu, S. I., Méndez-Barrios, C.F., González-Galván, E. J. y Hernández-Molinar, R. (2016). A transparent bilateral control scheme for a local teleoperation system using proportional-delayed controllers. In *2016 12th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*.
- Kawai, Y., Namerikawa, T. y Fujita, M. (2010). Bilateral teleoperation of wheeled mobile robot with time delay using virtual image robot. In *2010 IEEE International Conference on Control Applications*.
- Kharitonov, V.L. (2013). *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*. Birkhäuser Boston.
- Kim, M., Lee, S. y Son, H. (2016). Effects of time delay on long range formation control for unmanned aerial vehicles. In *2016 13th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI)*.
- Lozano, R. (2010). *Unmanned Aerial Vehicles: Embedded Control*. Wiley-Iste.
- Ordaz, J., Salazar, S., Mondié, S., Romero, H. y Lozano, R. (2012). Predictor-based position control of a quadrotor with delays in gps and vision measurements. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 70, 13–26.
- Rojas-Ricca, B. (2021). *Sintonización de un observador predictor para sistemas no lineales con retardo en la entrada*. Master's thesis, Cinvestav-IPN.
- Romero, H., Benosman, R. y Lozano, R. (2006). Stabilization and location of a four rotor helicopter applying vision. In *2006 American Control Conference*, 6–12.
- Vite, L., Gomez, M. A., Morales, J. y Mondié, S. (2020). A new control scheme for time-delay compensation for structural vibration. *IFAC-PapersOnLine*, 53, 4804–4809.